L3 : Mathématiques et Economie **9 décembre 2020**
2020–2021

CC2 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

LES DOCUMENTS, CALCULATRICES ET TÉLÉPHONES NE SONT PAS AUTORISÉS.
Un barême est donné à titre indicatif (il est donc susceptible de changer).

Donner les définitions : (5 *points*)

1. d'une fonction μ-intégrable,
2. de l'intégrale d'une fonction μ-intégrable,
3. d'un ensemble convexe,
4. d'une fonction convexe,
5. de la tribu produit.

Donner les formulations : (4 *points*)

1. du théorème de convergence dominée de Lebesque,
2. de l'inégalité des pentes,
3. du théorème de dérivabilité avec condition de domination,
4. du théorème de Fubini.

Exercice 1 (3 *points*) Soit $(\Omega, \mathcal{T}\mu)$ un espace mesuré. Soit $A, B \in \mathcal{T}$ tels que $\mu(A) < \infty$ et $\mu(B) < \infty$. Calculer $\mu(A \cup B)$ en fonction de $\mu(A)$, $\mu(B)$ et $\mu(A \cap B)$.

Exercice 2 (4 *points*) Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Pour $s > 0$, soit

$$\mathfrak{L}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x) dx.$$

Montrer que $\mathfrak{L}$ est bien définie et calculer $\lim\limits_{s \to +\infty} \mathfrak{L}(s)$.

Exercice 3 (7 *points*)

1. Soient $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $c \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$A_c := f^{-1}\big(] - \infty, c]\big)$$

est un ensemble convexe.

2. Montrer que la boule unité fermée

$$B = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|(x_1, \ldots, x_n)\| \leq 1 \right\}$$

est une partie convexe.

3. Soit $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1^4 - 2$. Pour tout $\epsilon > 0$ soit

$$B_\epsilon = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 + \epsilon\, g(x_1, \ldots, x_n) \right\}.$$

On se propose de montrer que B_ϵ n'est jamais convexe.

(a) D'abord, montrer que B_ϵ n'est pas convexe si $n = 1$. (Indication : montrer que si $a > 1$ et $-b > 1$ sont suffisament grands alors a et $b \in B_\epsilon$.)

(b) Conclure.