L3 : Mathématiques et Economie **1er décembre 2021**
2021–2022

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.
Attention : une réponse "Vrai" ou "Faux" correcte sans justification elle aussi correcte ne donnera lieu à aucune attribution de point.
LE SUJET EST RECTO-VERSO !

Donner les définitions :

1. d'une fonction étagée,
2. d'une fonction μ-intégrable et de son intégrale,
3. d'une fonction convexe.

Donner les formulations :

1. du théorème de convergence dominée de Lebesgue,
2. du théorème sur la relation entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue,
3. du théorème de continuité avec condition de domination.

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer ou réfuter (en proposant des contre-exemples) les assertions suivantes :

1. Si $x \in \Omega$ est tel que $\{x\} \in \mathcal{T}$ alors $\mu(\{x\}) = 0$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ est une suite croissante et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors on a
$$\int_\Omega 1_A d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$
3. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable satisfaisant $\int_\Omega f d\mu = 0$ alors $f = 0$.
4. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est une fonction μ-intégrable alors pour tout $\varepsilon > 0$
$$\mu(\{x \in \Omega : f(x) \geq \varepsilon\}) < +\infty.$$

Exercice 2 Calculer $\iint_D f(x, y)dxdy$ où $f(x, y) = \dfrac{x^2}{y}$ et $D = [-1, 1] \times [1, 2]$.

Exercice 3 Soit μ une mesure **non-nulle** sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire satisfaisant $\mu(p + A) = \mu(A)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $A \subset \mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.
   Indication : On raisonnera par l'absurde et on trouvera une contradiction concernant la valeur de $\mu(\mathbb{Z})$.
2. Montrer que $\mu(\{n\}) = \mu(\{n_0\})$ pour tous $n \in \mathbb{Z}$,.
3. En déduire que la mesure μ est infinie.
4. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{Z}$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et $\mathbb{R}$ de celle des boréliens.
   (a) Est-ce que la fonction f toujours mesurable ?
   (b) Est-ce que la fonction f toujours intégrable ?

Exercice 4 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré probabilisé (c.à.d. $\mu(\Omega) = 1$) et $f : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction borélienne. On pose $A_- = \{x \in \Omega : f(x) < 1\}$, $A_0 = \{x \in \Omega : f(x) = 1\}$ et $A_+ = \{x \in \Omega : f(x) > 1\}$. Soit g définie par

$$\begin{aligned} g : \Omega &\to [0, +\infty] \\ x &\mapsto \lim_{n\to+\infty} f(x)^n. \end{aligned}$$

1. Montrer que A_-, A_0 et A_+ sont mesurables et $\Omega = A_- \sqcup A_0 \sqcup A_+$.
2. Montrer que g est mesurable.
3. Montrer que si $\mu(A_+) > 0$ alors $\int\limits_{A_+} g d\mu = +\infty$.
4. Montrer que $\int\limits_{A_-} g d\mu = 0$.
   Indication : se rappeler du théorème de convergence dominée.
5. En déduire que si $\int\limits_{\Omega} g d\mu < +\infty$ alors $\int\limits_{\Omega} g d\mu = \mu(A_0)$.