2018/2019 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Feuille d'exercices II.

Fonctions continues

TDi **Exercice 1.** Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

CMi-TDi **Exercice 2.** Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui le satisfont :

CMV → 1. $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

CM. **Exercice 3.** Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

TDV • **Exercice 4.** Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

CMi **Exercice 5.** Soit X, Y deux ensembles, $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer que, pour tout $A, B \subseteq Y$ on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

TDi ou V. **Exercice 6.** Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

CMi ou pas **Exercice 7.** Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

CMV **Exercice 8.** On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.

CMV **Exercice 9.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

CMV. **Exercice 10.** Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

f 10TD1. • **Exercice 11.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n, puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ? f est-elle continue ?

Exercice 12. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 13. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.
Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in X\} .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, et $f\colon E \to F$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq E$ on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie en général ?
2. On suppose de plus que f est surjective. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 15. (Applications linéaires) Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E vers F. Vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.
4. $\exists K > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.
5. f est lipschitzienne.
6. f est uniformément continue.

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues. Montrer que l'application $|||\cdot|||$ définie pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ par

$$|||f||| = \sup\{\|f(x)\| \colon x \in \bar{B}(0,1)\}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Exercice 16. Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que μ est bien définie que que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Exercice 2 feuille II.

1) Il s'agit des fonctions constantes. En effet supposons f satisfait l'énoncé :

$$\exists \delta > 0 \ \forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall x' \in \mathbb{R} \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')|$$

Soit δ donné par l'énoncé. Voyons que dans tout intervalle de la forme $[(n-1)\delta, (n+1)\delta]$ avec $n \in \mathbb{N}$, f est constante :
on pose $x = n\delta$. Si il existe $y \in [(n-1)\delta, (n+1)\delta]$ t.q. $f(x) \neq f(y)$ on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x) - f(y)| > 0$ et donc puisque $|x - y| < \delta$ on a $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ mais ceci implique $2\varepsilon < \varepsilon$ ce qui est absurde.
f est donc constante sur $[(n-1)\delta, (n+1)\delta]$

et donc elle est constante sur $\mathbb{R}$, puisque ces intervalles recouvrent $\mathbb{R}$.

2) Voyons que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfait l'énoncé :
$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall x' \in \mathbb{R} \ \exists \delta \ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $x \in \mathbb{R}$, $x' \in \mathbb{R}$. On prend
$\delta = |x - x'| + 1$
Puisque $|x - x'| < \delta$ est une affirmation fausse on peut en déduire ce qu'on veut notamment $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Chapitre 2 – Fonctions continues entre espaces métriques

Continuité en x : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta ;\ \delta = (\varepsilon, x) \quad \forall x' \ldots$

continuité unif. : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta,\ \delta(\varepsilon),\ \forall x, x' \ldots$

lipschitzienne : $\exists k,\ \forall x, x' \quad d(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x')$

① EX ~~TD~~ TD 1 – Mq f $x \mapsto x^2$ n'est pas unif continue sur $\underline{\mathbb{R}}$

Soit $\varepsilon > 0$. supp $\delta > 0$ tq existe et x, x' tq $|x - x'| < \delta$

$X_n = n$

$X'_n = n + \frac{1}{n}$

~~alors $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| < \varepsilon$~~

~~$x - \delta \leq x' \leq x + \delta \Rightarrow (x-\delta)^2 < x'^2 < (x+\delta)^2$~~

à partir d'un certain n.

$|X_n - X'_n| = \frac{1}{n} < \delta$

~~$\Rightarrow x^2 - (x+\delta)^2 < x^2 - x'^2 < x^2 - (x-\delta)^2$~~

Mais par contre $|X_n^2 - X_n'^2| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2$

~~$-2x\delta + \delta^2 < x^2 - x'^2 < 2x\delta + \delta^2$~~

~~lorsque $x \to \infty$ $|x^2 - x'^2| \to +\infty$ on ne peut pas avoir $|x^2 - x'^2| < \varepsilon$~~

Rmq : Par contre si on restrein $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ elle est unif. continue !

ex : $f : [3,4] \to [9,16]$.

Soit $\varepsilon > 0$ .. $|f(x) - f(x')| = |x^2 - x'^2| = |x - x'|\,|x + x'|$

et $|x + x'| \leq |x| + |x'| \leq 2 \sup\{|x|, |x'|\}$

Donc si $(x, x') \in [3,4] \times [3,4]$ $|x + x'| \leq 8$

D'où $|f(x) - f(x')| \leq 8|x - x'|$

on peut donc prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{8}$.

EX TD2 – 1) $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \forall x' \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

on montre d'abord $\forall x$, f cst sur $[x-\delta, x+\delta]$ si non $\exists y \in [x-\delta, x+\delta]$ tq $f(x) \neq f(y)$

(fonctions constantes) et on prend $\varepsilon = \frac{1}{2}|f(x) - f(y)|$ absurde.

Du coup comme $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(n-1)\delta, (n+1)\delta]$ f cst^{te} sur $\mathbb{R}$.

2) $\forall \varepsilon > 0\ \forall x\ \forall x' \quad \exists \delta > 0 \quad |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$

on prend $\delta = \frac{|x - x'|}{2}$ donc $|x - x'| < \delta$ faux et on peut en déduire ce qu'on veut.

~~fonctions~~ continues (toutes les fctions)

EXTD3 – $f : X \to Y$ lipschitzienne, soit k tq $\forall x\ \forall x'$ $D(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x')$

Soit $\varepsilon > 0$ on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2k}$ alors $\forall x, \forall x'$

$d(x, x') < \delta \quad D(f(x), f(x')) \leq k\, d(x, x') \leq k \frac{\varepsilon}{2k} < \varepsilon$ □

EXTD 4 : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable, $\exists M$, $\forall x$ $|f'(x)| \leq M$.

On se donne $x, x' \in \mathbb{R}$ supposons $x \neq x'$

f cont sur l'intervalle $[x, x']$

f dér. l'inégalité des accroissements finis nous dit

$\exists c \in [x, x']$ tq

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \leq f'(c) \leq M.$$

d'où $\forall x, x'$ $|f(x) - f(x')| \leq M |x - x'|$

EXTD 5 $f : X \to Y$ $A, B \subseteq Y$

1) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.

2) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$

$x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$

$\Leftrightarrow f(x) \in A$ et $f(x) \in B$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

EXTD 6 $f : x \mapsto x^2$

1) $f([-3, -1]) = [1, 9]$ $\quad f([-3, -1] \cup [-2, 1]) = [1, 9]$

$f([-2, 1]) = [1, 4]$ $\quad f([-3, -1] \cap [-2, 1]) = [1, 4]$.

2) $f^{-1}(]-\infty, 2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$f^{-1}([1, +\infty[) =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

$f^{-1}(]-\infty, 2] \cup [1, +\infty[) = \mathbb{R}$

$f^{-1}(]-\infty, 2] \cap [1, +\infty[) = [-\sqrt{2}, -1] \cup [1, \sqrt{2}]$

EXTD 7 $f : E \to F$ $A, A' \subset E$, $B, B' \in F$

1) $f(f^{-1}(f(A))) = f(A)$ $\quad \left(f^{-1}(f(A)) \supseteq A \right)$

$f^{-1}(f(f^{-1}(B))) = f^{-1}(B)$ $\quad \left(f(f^{-1}(B)) = B \right)$!

2) $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

$x \in f(A \cap f^{-1}(B)) \Leftrightarrow \exists y \in A \cap f^{-1}(B)$ $f(y) = x$

$\Leftrightarrow \exists y \; \cancel{\in A} \; (y \in A$ et $y \in f^{-1}(B))$, $f(y) = x$

$\Leftrightarrow x \in f(A) \cap f(f^{-1}(B))$

$\Leftrightarrow x \in f(A) \cap B$

3) on a toujours $f(E \setminus A) \subseteq F \setminus f(A)$

si f surjective réciproque toujours vraie.

EXTD8 : 1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto x+y$.

avec déf cont : ~~supp.~~ soit $(x,y), (x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$.
On prend $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ et

si $\|(x,y) - (x',y')\|_\infty = \max\{|x-x'|, |y-y'|\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $|(x-x') + (y-y')| \leq |x-x'| + |y-y'|$
$\leq 2\max\{|x-x'|, |y-y'|\} \leq 2\frac{\varepsilon}{2} \leq$

2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto xy$.

Supposons suite $(x_n, y_n) \to (x,y)$. $\Leftrightarrow$ $x_n \to x$ $y_n \to y$.

Soit $\varepsilon > 0$. $\varepsilon_1 = \min\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{|y|}\}$ si $y \neq 0$. $\exists N_1$ $\forall n \geq N_1$ $|x_n - x| < \varepsilon_1$

$\varepsilon_2 = \min\{\sqrt{\varepsilon}, \frac{\varepsilon}{|x|}\}$ $\exists N_2$ $\forall n \geq N_2$ $|y_n - y| < \varepsilon_2$.

Alors si $n \geq \max\{N_1, N_2\}$.

$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n - y x_n + xy + x(y_n - y) + y(x_n - x)|$
$\leq |x_n - x||y_n - y| + |x||y_n - y| + |y||x_n - x|$

$\leq \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon + \varepsilon$

$\leq 3\varepsilon$.

on peut simplifier en utilisant
$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy|$
$= |(x_n - x) y_n + x(y_n - y)|$
$\leq M|x_n - x| + |y_n - y||x|$
et y_n bornée car suite réelle cv
....

d'où $x_n y_n \to xy$.

EXTD 9 $f, g : X \to \mathbb{R}$ continues.

1) $f+g$ continue : Soit $x \in X$. et $(x_n) \subseteq X$,
$x_n \to x$.
Alors $f(x_n) \to f(x)$ et $g(x_n) \to g(x)$
Calculons $(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to f(x) + g(x)$.
(facile)

2) fg continue : on prend
$fg(x_n) = f(x_n)g(x_n) \to f(x)g(x)$ ...

EXTD 10 : $g : X \to Y$ $f : Y \to Z$ unif. continues. Mq $f \circ g$ un. cont

~~$\exists k_1, \exists k_2$ $\forall x, x' \in X$ $\forall y, y' \in Y$ $|x - x'| \leq k_2 |g(x) - g(x')|$~~
~~$|y - y'| \leq k_1 |f(x) - f(x')|$~~
~~d'où $\forall x, x' \in X$ $|x - x'| \leq k_2 |g(x) - g(x')| \leq k_1 k_2 |f \circ g(x) - f \circ g(x')|$~~

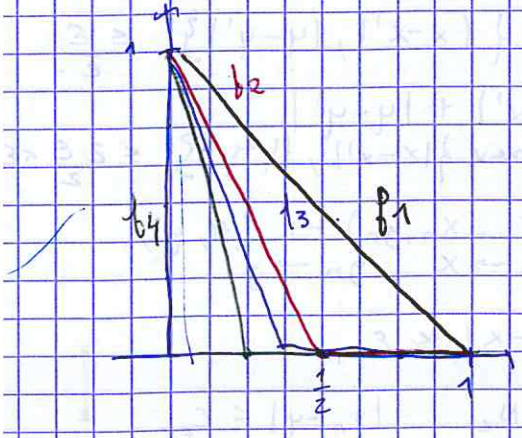
Soit $\varepsilon > 0$ Alors $\exists \delta_2$ $\forall y, y' \in Y$ $d(y, y') < \delta_2 \Rightarrow d(f(y), f(y')) < \varepsilon$.
on sait $\exists \delta_1$ $\forall x, x' \in X$ $d(x, x') < \delta_1 \Rightarrow d(g(x), g(x')) < \delta_2$

Or $\forall x, x'$ si $d(x, x') < \delta_1 \Rightarrow d(g(x), g(x')) < \delta_2$
$\Rightarrow d(f \circ g(x), f \circ g(x')) < \varepsilon$ $\square$.

lundi 2 matin → 9h
mercredi 4 matin → 9h.

2.2 Suites de fonctions

EXTD 11 : $f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \geq \frac{1}{n} \\ 1-nx & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}$



1) (f_n) converge simplement vers $f : \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Soit $\varepsilon > 0$ $x \in X$ alors on choisit N tq $\frac{1}{N} < x$.

du coup $\forall\, n \geq N$ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} \leq x$ et

$f_n(x) = 0 \Rightarrow |f_n(x)| \leq \varepsilon$.

2) (f_n) n'est pas unif. continue en effet prenons par exemple $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et

N quelconque. ~~Alors~~ Pour $\forall\, n \geq N$ si on prend $0 \leq x < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$

on a $f_n(x) = 1 - nx$ et donc

$f_n(x) \geq 1 - n \cdot \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

3) ~~f_n est continue~~ f n'est pas continue en 0.

EXTD 12 : limite uniforme de fct unif cont est unif continue.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\, N$ tq $\forall n \geq N$, $\forall x$ $D(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

De plus pour chaque n $\exists\, \delta_n$ tq $\forall x \forall x'$

$d(x,x') < \delta_n \Rightarrow D(f_n(x), f_n(x')) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Alors $\forall\, x, x'$ $d(x,x') < \delta_N$ ⇒ implique

$D(f(x), f(x')) \leq D(f(x), f_N(x)) + D(f_N(x), f_N(x')) + D(f_N(x'), f(x'))$
$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ □.

EXTD 14 : 1) • $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} \{|f(x)|\} = 0 \iff f(x) = 0\ \forall x$
$\iff f = 0$.

• $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} \{|(f+g)(x)|\} \leq \sup_{x \in X} \{|f(x)| + |g(x)|\}$
$\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Voyons $\{(f_n)\}$ conv unif vers $f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$

"⇒" soit $\varepsilon > 0$ $\exists\, N$ $\forall\, n \geq N$ $\forall\, x \in X$ $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$

$\forall \varepsilon > 0$. $\qquad f_n(x) < \varepsilon$.

$1 - nx < \varepsilon$.

$1 - \varepsilon < nx$

$\frac{1}{n} \leq x$. $\qquad \frac{1-\varepsilon}{x} < n$

$1 \leq nx$

EX13 1) $E = \{ f : X \to \mathbb{R},\ \exists M \ |f(x)| \leq M \ \forall x \in X \}$.

$\|f\|_\infty = \sup \{ |f(x)|, x \in X \}$.

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme : • $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in X} |f(x)| = 0$.

$\iff f(x) = 0 \ \forall x \in X$

$\iff f = 0$.

• $\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x \in X} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in X} |\lambda| |f(x)| = |\lambda| \sup_{x \in X} |f(x)|$.

• $\|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)| + |g(x)|$

$\leq \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

(f_n) conv unif vers $f \iff \|f_n - f\|_\infty \to 0$.

"$\Rightarrow$" soit $\varepsilon > 0$. $\exists N$ tq $\forall n \geq N \ \forall x \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

puisque $\{ |f_n(x) - f(x)| = |(f_n - f)(x)|, x \in X \}$ borné par M alors et que ε majorant alors

$\sup |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. $\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$

"$\Leftarrow$" évident.

$\mathcal{C} = \{ f \in E, \ f \text{ continue} \}$ est fermé : $(f_n) \to f$ pour $\|\cdot\|$.

alors $f_n \xrightarrow{\text{unif}} f$. $\Rightarrow f$ cont $\xrightarrow{f_n \text{ continus}} f \in E$ et $\mathcal{C}$ fermé.

$\ \ \ \ \ $cont

2) a) $d : \mathbb{R}^2 \to [0, +\infty[\qquad d(x,y) = \min(1, |x-y|)$

• d distance : $d(x,y) = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$

si $|x-z| \leq 1$ et $|x-y|$ ou $|y-z| \geq 1$

$|x-z| \leq 1 \leq 1 + \ldots$

si $|x-z| \leq 1$ et $|x-y| \geq 1 \ |y-z| \geq 1$

inégalité triangulaire.

si $|x-z| \geq 1$ et encore ~~la même chose~~ $|x-y| \leq 1$ et $|y-z| \leq 1$ $\Rightarrow$ triv

si $|x-y| \geq 1$ ou $|y-z| \geq 1$

$d(x,z) = 1 \leq 1 + \ldots$ ✓. + symétrie évident.

b) $F = \{ f : X \to \mathbb{R} \}$ $\quad d'(f,g) = \sup \{ |d(f(x), g(x))|, x \in X \}$.

Comme $d(x,y) \leq 1 \ \forall x,y$ ensemble borné donc sup existe

$d(f,g) = 0 \iff \sup \{ |d(f(x), g(x))|, x \in X \} = 0 \iff d(f(x), g(x)) = 0 \ \forall x$

$\iff f = g$.

$\sup_{x \in X} \{ d(f(x), g(x)), x \in X \} \leq \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) + d(h(x), g(x)) \leq \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) + \sup_{x \in X} (\ldots$

c) $(f_n) \xrightarrow{\text{unif}} f \iff \|f_n - f\|$

....

Chapitre 3 — Compacité

INTÉRÊT : ~~fournit donc~~ · existence limites pour suites bien choisies
· propriété de finitude, continuité de fonctions

rappel : une suite de $\mathbb{R}$ bornée et monotone converge.
utilise : de $\mathbb{R}$ ensemble borné (non vide) admet borne sup (ou inf).
· fct cont ont des propr très fortes
eg : fct continue sur segment est bornée et atteint ses bornes.

exemples compacts : dans $\mathbb{R}$: ~~segments~~
~~fermés bornés~~
· $[1,+\infty[$ fermé mais non compact prendre $x_n = n$.
· $[1,3[$ $\quad x_n = 3 - \frac{1}{n}$.
(suite extr. conv. vers $3 \notin [1,3[$).
· segments
· théo : fermés bornés de $\mathbb{R}$

Pour info : On peut définir notion de compacité sur des espace + généraux que les espaces métrique → "espace topologiques" de même notion ouvert, fermé, etc...
(séparé et quasi-compact)

rappel : borne sup dans $\mathbb{R}$: équivalents : $M \in \mathbb{R}$. S ensemble.
· $\forall s \in S \quad s \leq M$ et si M' tq $\forall s \in S \; s \leq M'$ alors ~~M'≤M~~ $M \leq M'$
(+ petit des majorants).
· $\exists$ suite $x_n \in S \quad x_n \to M$ et M majorant.

2017/2018
Université Lyon I

Semestre d'automne - L3 MathEco
Topologie et Théorie de la mesure

Feuille d'exercices III.

Espaces métriques compacts.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\} \ , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + xy + y^2 \leq 1\} \ ,$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x(1-2x)\} \ .$$

Exercice 2. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenu dans $\overline{B}(0,r)$.

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que $\alpha \in X$ est une *valeur d'adhérence* de (x_n) s'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers α.
Montrer que, si (X,d) est compact, alors (x_n) converge vers α si, et seulement si, α est la seule valeur d'adhérence de (x_n). Ce résultat demeure-t-il vrai si l'on ne suppose plus X compact ?

Exercice 5.

1. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
2. Soit $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (a) Montrer que g est bornée.
   (b) La fonction g atteint-elle nécessairement ses deux bornes ?
   (c) Montrer que g atteint au moins l'une de ses bornes.

Exercice 6. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour une distance induite par une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x,F) = \inf\{d(x,y) \colon y \in F\} \ .$$

1. Montrer que $x \mapsto d(x,F)$ est une fonction continue.
2. Montrer que $d(x,F) = 0$ si et seulement si x appartient à F.
3. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que

$$d(x,y) = \inf\{d(a,b) \colon a \in K, b \in F\} \ .$$

Ce résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ?

Exercice 7. Étant données A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$, on définit leur somme $A + B$ par

$$A + B = \{a + b\colon a \in A, b \in B\} .$$

1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A + B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A + B$ est fermé.
3. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X tels que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique compact, et $f\colon X \to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x, y) .$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $d(a, f(a)) = \min\{d(x, f(x))\colon x \in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $d(f(x), f(y)) \leq d(x, y)$ pour tout x, y ?

Exercice 10. On considère une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Montrer que si K est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ alors $f(F)$ est une fermé de $\mathbb{R}$.

Feuille d'exercices III.

Parties compactes.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\} \ , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3\} \ ,$$
$$C = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0,1]\} \ , \quad D = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0,1]\}.$$

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 3. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $\overline{B}(0,r)$.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \colon a \in A\} \ .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,A) \leq d(y,A) + \|y-x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x,A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas,
$$d(x,F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$
4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit
$$d(A,B) = \inf\{\|b-a\| \colon a \in A, b \in B\} \ .$$
Montrer que $d(A,B) = \inf\{d(a,B) \colon a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que
$$d(K,F) = \|b-a\|.$$
6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 5. Soit X une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, et $f \colon X \to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in X \ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\| \ .$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $\|f(a) - a\| = \min\{\|f(x) - x\| \colon x \in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|$ pour tout x, y ?

Exercices

EXTD1 : • $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + y^4 = 1\}$

$A \subseteq [-1,1] \times [-1,1]$ donc borné.
$A = f^{-1}(\{1\})$ par $f(x,y) = x^2+y^4$ continue
donc fermé $\Rightarrow$ A compact.

• $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$

On complète $(x+\frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 \leq 1$. $\Rightarrow \frac{3}{4}y^2 \leq 1$
$\Rightarrow |y| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$

et puisque $(x+\frac{1}{2}y)^2 \leq 1$ $\Rightarrow -1-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq 1-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow B \subseteq]-1-\frac{1}{\sqrt{3}}, 1-\frac{1}{\sqrt{3}}] \times [-\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}]$ donc borné.

$B = f^{-1}(]-\infty, 1])$ $f(x,y) = x^2+xy+y^2$ continue
fermé donc B fermé $\Rightarrow$ B compact.

• $C = \{(x,y), \quad y^2 = x(1-2x)\}$

Or $y^2 - x(1-2x) = 0.$ $\Leftrightarrow y^2 + 2x^2 - x = 0$
$\Leftrightarrow y^2 + 2(x^2 - \frac{1}{2}x) = 0.$
$\Leftrightarrow y^2 + 2(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{8} = 0$
$\Leftrightarrow y^2 + 2(x - \frac{1}{4})^2 = \frac{1}{8}$

c'est une ellipse. Borné par : $|y| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

et donc $(x-\frac{1}{4})^2 \leq \frac{1}{16}$ $\Rightarrow |x-\frac{1}{4}| \leq \frac{1}{4}$.
$\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

D'où $C \subseteq [0, \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}]$ borné.

$C = f^{-1}(\{0\})$ par $f(x,y) = y^2 - x(1-2x)$ fermé.

EXTD2 : A compact $\subseteq B(0,1)$. $\subseteq (E, \|\cdot\|)$.

$\|\,\| : A \to \mathbb{R}$ continue donc atteint ses bornes.

Soit $x_0 \in A$ tq $\|x_0\| = \sup_{x \in A} \|x\|$. et notons $r = \|x_0\|$

Alors $A \subseteq \overline{B}(0,r) = \{x \in E, \|x\| \leq r\}$ $\quad r < 1$.

EXTD3 : (X,d) métrique, $(x_n) \in X$ $(x_n) \to x$

$A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ compact.

On considère suite $(y_n) \in A$. si $\exists x \in A$ tq
$y_n = x$ pour une infinité de n $\Rightarrow$ on prend la
suite extraite constante x.

. si un tel x n'existe pas on va construire y_{n_k} comme suit

$\underset{\text{choisi } i}{n}$ $\quad y_{n_0} = y_i = x_{k_0}$ pour certain k_0.

par récurrence on construit suite (y_{n_k}) tq

$$y_{n_0} = x_{k_0}, \quad y_{n_1} = x_{k_1}, \ldots \quad \text{et} \quad k_0 < k_1 < \ldots$$

supposons $y_{n_0}, \ldots, y_{n_i}$ construits.

Parmi les $y_{n_i+1}, y_{n_i+2}, \ldots$ (infini)

on trouve $x_{k_{i+1}}$ tq $k_{i+1} > k_i$

Si un tel $x_{k_{i+1}}$ n'existait pas alors les $y_{n_{i+1}}, y_{n_{i+2}}, \ldots$

ne prendraient que les valeurs parmi $x_0, \ldots, x_{k_i}$ (fini)

donc une des valeurs se répéterait ∞ de fois.

Comme (y_{n_k}) ss de $x_n \to x \in A$ □.

EXTD 4 (X, d) compact,

$(x_n) \to \alpha \iff \alpha$ est la seule valeur d'adhérence de (x_n)

"$\Rightarrow$" $(x_n) \to \alpha$ toute ss suite $\to \alpha$.

"$\Leftarrow$" supp α seule val. d'adhérence de (x_n)
et supp $x_n \not\to \alpha$.

$\exists \varepsilon > 0$ tq $\forall N, \exists n \geq N \quad d(x_n, \alpha) > \varepsilon$.

~~on pose $N = 1, \ldots$ n_i tq $d(x_{n_i}, \alpha) > \varepsilon$.~~

$N = 1 \quad n_1$ tq $d(x_{n_1}, \alpha) > \varepsilon$.
$N = n_1 \quad n_2 > n_1 \quad d(x_{n_2}, \alpha) > \varepsilon$.
$\vdots$

on obt une ss suite (x_{n_k}) de (x_n) tq
tous ses termes vérifient $d(x_{n_k}, \alpha) > \varepsilon$.

Mais elle a ss suite conv $\to \alpha$ ↯.

EX TD 5: 1) $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ continue $\quad f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$

On sait $\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta \; \forall x, \|x\| \geq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$

On pose $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $f(x_0) = M$, et on choisit δ comme
dans l'énoncé ci-dessus. Alors pour tout x, $\|x\| \geq \delta$
$f(x) \geq M$
On considère $\overline{B}(0, \delta)$ compact donc f bornée et
atteint ses bornes. Soit $x_1 \in \overline{B}(0, \delta)$ tq.

$$f(x_1) = \min_{x \in \overline{B}(0,\delta)} f(x) \leq M$$

et on choisit x_i tq $f(x_i) = \min\{f(x_0), f(x_1)\}$.

Alors $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f(x) \geqslant f(x_i)$. □.

2). $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad g(x) \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta, \ \|x\| > \delta \quad |g(x)| < \varepsilon$.

On se donne $\varepsilon > 0$, on choisit δ. tq $\|x\| > \delta \Rightarrow |g(x)| <$

Du coup $\forall \ \|x\| > \delta \quad |g(x)| < \varepsilon$ donc borné

si $\|x\| \leqslant \delta$. $\Leftrightarrow x \in \overline{B}(0, \delta)$ compact.
donc g borné et atteint ses bornes.

donc g borné.
Mais sur $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}(0,\delta)$ g n'atteint pas forcément ~~ses~~ min bornes ex

EXTD6 $\quad F \subseteq \mathbb{R}^n$ fermé $\quad d(x,F) := \inf\{d(x,y), y \in F\}$

1) $d : F \to \mathbb{R}$ continue voyons d lipschitzienne
$x, x' \in \mathbb{R}^n$ et soit $y \in F$ quelconque.

$d(x,F) \leqslant d(x,y) \leqslant d(x,x') + d(x',y)$

on prend inf sur y. $\quad d(x,F) \leqslant d(x,x') + d(x',F)$

$d(x,F) - d(x',F) \leqslant d(x,x')$.

par symétrie entre x, x' on montre $\quad |d(x,F) - d(x',F)| \leqslant \|x - x'\|$

2) "$\Rightarrow$" $d(x,F) = 0$
$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists y_n \in F$
$d(x, y_n) \leqslant \frac{1}{n+1}$.
(y_n) suite dans F
$(y_n) \to x$
Comme F fermé $x \in F$

2) $d(x,F) = 0 \iff x \in F$ ~~$\exists$ suite $x_n \in F$ tq $d(x_n, F) \to$~~
"$\Leftarrow$" évident / $d(x,F) = 0$ ~~d continue~~
"$\Rightarrow$" ~~$\exists y \in F \ d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ car distance $\Rightarrow x \in F$.~~

3) K compact donc d borné et atteint ses bornes sur K.
$\exists x_0 \in K$ tq $\quad d(x_0, F) = \inf\{d(x,F), \ x \in K\}$
$= \inf\{d(a,b), \ a \in K, b \in F\}$.

Comme $d(x_0, F) = \inf\{d(x_0, y), \ y \in F\}$ Voyons $\exists y_0$ tq $d(x_0,F) = d(x_0, y_0)$

Notons $d = d(x_0, F) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists y_n \in F \quad d(x, y_n) \leqslant d + \frac{1}{n}$
notons $d_n = d(x, y_n) \quad (d_n) \to d$ ~~et donc est bornée~~ définit une suite (y_n) $\in F$ bornée. Elle admet donc une sous-suite convergente soit y_0 sa limite
Alors $y_0 \in F$ et $d(x, y_n) \to d(x, y_0) = d(x, F)$.

non : $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y = x\}$
$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \ y = x + e^{-x}\}$ $\quad$ A, B fermés mais infiniment proches.

EXTD7 : $A, B \in \mathbb{R}^n$.

1) A, B compact $\Rightarrow$ $A+B$ compact.

(c_n) suite de $A+B$ $\Rightarrow$ $c_n = a_n + b_n$ $\rightarrow (a_n)$ suite A (b_n) suite de B

On extrait une suite convergente de (a_n) : $(a_{n_k}) \to a$.

On considère la ssuite $(b_{n_k})_k$ de B. et l'on extrait une ss conv $(b_{n_{k_i}})_i \to b$

donc $(b_{n_{k_i}}) \to b$ $(a_{n_{k_i}}) \to a$ (car ss suite $\to a$)

et $(c_{n_{k_i}})_i \to a+b$. donc $A+B$ compact.

2) A compact, B fermé $\Rightarrow$ $A+B$ fermé

(c_n) suite $A+B$, $(c_n) \longrightarrow c$

$c_n = a_n + b_n$ $\exists$ sssuite $a_{n_k} \to a \in A$. car A compact

$\Rightarrow$ $c_{n_k} \to c$ et $b_{n_k} \to c-a$.

$\Rightarrow$ $c-a \in B$ car B fermé

donc $c_{n_k} \to c \in A+B$. $\Rightarrow (c_n) \to c \in A+B$.

$\Rightarrow A+B$ fermé.

3) A, B fermés $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy = 1\}$ $B = \{0\} \times \mathbb{R}$

$A+B$ on considère la suite $u_n = (\frac{1}{n}, 0) = (\frac{1}{n}, n) + (0, -n) \in A+B$.

quand $n \to \infty$ $u_n \to (0,0) \notin A+B$ donc pas fermé.

EXTD8 : (K_n) compacts non vides $K_{n+1} \subset K_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$K = \bigcap_n K_n$

1) K compact et non vide. : int arbitraire fermés est fermé et $K_1 \supseteq K$ et K_1 borné alors borné $\Rightarrow K$ compact.

Pour chaque K_n on choisit $x_n \in K_n$.

(x_n) suite de K_1 $\Rightarrow$ $\exists$ ssuite $(x_{n_k}) \to x \in K_1$.

Pour chaque $N \in \mathbb{N}$. on a si $m \geq N$ x_{n_m} $\in$ K_N la suite une suite de $n_m \geq m \geq N$ et la suite $(x_{n_m})_{m \geq N} \in K_N$

elle conv aussi vers x car extraite de (x_{n_k}) $\Rightarrow$ donc conv vers x $\Rightarrow x \in K_N$

$\Rightarrow x \in \bigcap K_N$ $\Rightarrow$ $K \neq \emptyset$.

2) U ouvert tq $K \subseteq U$. Mq $\exists\, n \in \mathbb{N}$, $K_i \subseteq U$ $\forall i \geq n$.

supposons c'est faux : $\forall n\ \exists i : \forall i \geq n$ $K_i \not\subseteq U$

on choisit pour chaque n, $x_n \in K_{n_i} \cap U^c$.

On montre que (x_n) a une ss suite conv $\to x \in K$

d'où $x \in U^c$ car U^c fermé $\to$ $x \in K \cap U^c$ $\lightning$.

<u>EXTD 9</u> — (X,d), $f : X \to X$ continue tq

comp.

$$\forall x,y \in X,\ x \neq y \Rightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y)$$

1) On montre d'abord que $D : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, f(x))$ est continue (elle est lipschitzienne) (on comp. d est cont)

$\forall x, x' \in X$
$$\begin{aligned}
|D(x) - D(x')| &= |d(x, f(x)) - d(x', f(x'))| \\
&\leq |d(x, f(x)) - d(x', f(x)) + d(x', f(x)) - d(x', f(x'))| \\
&\leq |d(x, f(x)) - d(x', f(x))| + |d(x', f(x)) - d(x', f(x'))| \\
&\leq d(x, x') + d(f(x), f(x'))
\end{aligned}$$

si $x \neq x'$ $\quad \leq 2\, d(x,x')$

si $x = x'$ $\quad |D(x) - D(x)| = 0 \leq 2 \cdot 0$. c'est encore vrai

Donc D est bornée et atteint ses bornes sur K

$\exists\, a \in X$ tq $d(a, f(a)) = \min \{ d(x, f(x)),\ x \in X \}$.

supp $f(a) \neq a$ alors

$$D(f(a)) = d(f(a), f(f(a))) < d(a, f(a)) \quad \text{impossible.}$$

d'où $f(a) = a$.

- si on affaiblit l'hypothèse en $d(f(x), f(y)) \leq d(x,y)$ on ne peut pas conclure...

<u>EXTD 10</u> $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue, $|f(x)| \underset{\|x\| \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

1) K compact = fermé borné dans $\mathbb{R}$.

$f^{-1}(K)$ = fermé et reste à voir qu'il est borné

Supposons que ce n'est pas le cas : $\forall n\ \exists\, x \in f^{-1}(K)$, $\|x\| > n$.

on a donc une suite x_n, $\|x_n\| \to \infty$.

On suit donc $|f(x_n)| \to +\infty$.

Mais d'autre part $(f(x_n))$ suite dans K donc $\exists$ ss suite convergente $\to y \in K$. $(f(x_{n_k})) \to y$.

$\to |f(x_n)| \to |y|$ ($|\cdot|$ continue.

impossible.

2) F fermé de $\mathbb{R}^n$.

Soit (y_n) suite de $f(F)$ convergente $\to y$. $y_n = f(x_n)$ $x_n \in F$.

~~Ex~~ $K = \{y_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}$ compact.

$f^{-1}(K)$ compact. (x_n) suite de $f^{-1}(K)$ donc $\exists$ ss suite convergent $\to x$ avec $x \in f^{-1}(K)$.

Comme $(x_{n_k}) \to x$ suite de F, $x \in F$.

~~Il reste à voir~~ ~~$f(x_n)$~~ = De plus f continue donc ss suite de y_n $f(x_{n_k}) \longrightarrow f(x)$.

d'où $f(x) = y \in f(F)$ et $f(F)$ fermé.

TD 3 – compacité 2010

Ex1 • $B = \{(x,y),\ y^2 = x^3\}$ non borné

$\forall M > 0$ on pose $y = M$ et $x = \sqrt[3]{M^2}$.

• $C = \{(\cos t, \sin t),\ t \in [0,1]\}$ borné car $\subseteq [-1,1]^2$.

fermé car $C = f^{-1}(\{1\}) \cap [\cos 1, 1] \times [0, \sin 1]$

où $f : (x,y) \mapsto x^2+y^2$. cont. et $\{1\}$ et fermés.

• $D = \{(\cos t, \sin t),\ t \in]0,1]\}$ borné mais non fermé : suite $\left(\cos \frac{1}{n}, \sin \frac{1}{n}\right) \to (1,0)$ mais $(1,0) \notin D$.

Ex2. $\mathbb{R}[X]$, norme $\| \ \|_\infty$. $\overline{B}(0,1) = \{P \in \mathbb{R}[X],\ \|P\|_\infty \leq 1\}$

On considère la suite (X^n) dans $\mathbb{R}[X]$.

Supp. $\exists$ sous-suite (X^{n_k}) de (X^n) convergeant vers $P \in \mathbb{R}[X]$.

$P = a_0 + \dots + a_d X^d$ on prend $\varepsilon = \frac{1}{2} \min_i \{|a_i|, 1\}$.

~~Alors~~ Soit $N \in \mathbb{N}$ alors si $k > \max(N, d)$.

alors $n_k > \max(N,d)$ et $\|X^{n_k} - P\| = \max\{|a_0|, \dots, |a_d|, 1\} > \varepsilon$ }.

→ rmq : ~~Théorème~~ de Riesz : boule unité compacte ssi E de dim finie. (E e.v. réel)

Ex4 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ $d(x,A) := \inf\{\|x-a\|,\ a \in A\}$.

1) Mq $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $d(x,A) \leq d(y,A) + \|y-x\|$

Soit $a \in A$ $d(x,A) \leq d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a)$

on prend l'inf sur $a \in A$ $d(x,A) \leq \|x-y\| + d(y,A)$

2) on en déduit que $\forall x,y$ $d(x,A) - d(y,A) \leq \|x-y\|$ donc

$d(-,A)$ est 1-lipschitzienne donc continue

3) F fermé, $F \neq \emptyset$. Voyons $d(x,F) = 0$ ssi $x \in F$

"$\Leftarrow$" évident.

"$\Rightarrow$" soit x tq $d(x,F) = 0$ i.e. $\inf\{\|x-a\|,\ a \in F\} = 0$

il existe une suite $a_n \in F$ tq $\|x - a_n\| \to 0$ et $\|x - a_n\| \geq 0$

mais alors $a_n \to x$ et comme F fermé $x \in F$.

4) $B \subseteq \mathbb{R}^n$ $B \neq \emptyset$ $d(A,B) := \inf\{\|b-a\|,\ b \in B, a \in A\}$.

3- K compact $K \neq \emptyset$. Mq $\exists a \in K$, $b \in F$ tq $d(K,F) = \|b-a\|$

$d(K,F) = \inf\{d(x,F),\ x \in K\}$ comme K compact et $d(-,F)$ cont elle ~~atteint~~ est bornée et atteint ses bornes

donc $\exists\ x_0$ tq $\inf\{d(x,F),\ x \in K\} = d(x_0,F) = d$.

~~Il existe une suite $y_n \in F$~~ ~~$\inf\{d(x_0,y),\ y \in F\}$.~~

tq ~~$d(x_0,y_n) \to d$ et $d(x_0,y_n) \leq d$~~

Hors ~~$d(x_0,y_n)$ est une suite bornée ~~ ~~dans $[a,d]$~~

et ~~admet donc une ss suite convergente~~

~~La suite des y_n est bornée~~

~~Voyons $\exists\ y_0 \in F$ tq $d(x_0,F) = \|x_0-y_0\|$~~

~~On fixe $z \in F$ et on pose $B = F \cap \bar{B}(x_0, \|x_0-z\|)$. Puisque~~

~~$B \subseteq F$ $d(x_0,B) \geq d(x_0,F)$. Si $y \in F \setminus B$ $\|y-x_0\| \geq \|z-x_0\| \geq d(x_0,B)$~~

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists y$ tq $d(x_0,y) < d+\varepsilon$

$\exists$ suite $y_n \in F$ $d_n = d(x_0,y_n) \to d$ tq et $d(x_0,y_n) < d + \frac{1}{n}$

donc $d_n \to d$. admet ss suite convergente

~~car~~ la suite (y_n) est donc bornée ($\|y_n\| \leq \|y_n - x_0\| + \|x_0\| \leq d + 1 + \|x_0\|$)

et admet une sste convergente $(y_{n_k}) \to y_0$. et $y_0 \in F$ car fermé

la sous suite $d(x_0, y_{n_k}) \to d(x_0,y_0)$ par continuité.

et donc $d(x_0,y_n) \to d(x_0,y_0) = d$ $\square$

6- On considère $A = \{(t,e^t),\ t \in \mathbb{R}\}$ $B = \{(t,-e^t),\ t \in \mathbb{R}\}$

A et B sont fermés mais non bornés donc pas compacts.

De plus $t \to -\infty$ $|(t,e^t)| \to$ $e^t \to 0$ et $-e^t \to 0$

mais pas atteinte.

2018/2019 Semestre d'automne - L3 MathEco

Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Interrogation I

Durée 45mn

Question de cours.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 1.

On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle frontière de A l'ensemble défini par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathring{A})$.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)$ est fermé.
2. Calculer $\mathrm{Fr}(A)$, $\mathrm{Fr}(\mathring{A})$ et $\mathrm{Fr}(\overline{A})$ pour $A =]1,2] \cap \mathbb{Q}$
3. (**Bonus**) Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on a $\mathrm{Fr}(\overline{A}) \subset \mathrm{Fr}(A)$.

2018/2019
Université Lyon I

Semestre d'automne - L3 MathEco
Topologie et Théorie de la mesure

Interrogation I

Durée 45mn

QUESTION DE COURS.

Montrer que l'application $\|\cdot\|_\infty$ définie pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ par

$$\|(x,y)\|_\infty = \max\{|x|,|y|\}$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE 1.

On considère $(\mathbb{R},|\cdot|)$ et A une partie de $\mathbb{R}$. On appelle frontière de A l'ensemble défini par $\mathrm{Fr}(A)=\overline{A}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathring{A})$.

1. Montrer que $\mathrm{Fr}(A)$ est fermé.
2. Calculer $\mathrm{Fr}(A),\mathrm{Fr}(\mathring{A})$ et $\mathrm{Fr}(\overline{A})$ pour $A=]1,2]\cap\mathbb{Q}$
3. **(Bonus)** Montrer que pour toute partie A de $\mathbb{R}$ on a

$$\mathrm{Fr}(\overline{A})\subset\mathrm{Fr}(A).$$

2018

Ex1 . $B = \{(x,y),\ y^2 = x^3\}$ non borné

$\forall M > 0$ on pose $y = \sqrt{M}$ et $x = \sqrt[3]{M^2}$.

· $C = \{(\cos t, \sin t),\ t \in [0,1]\}$ borné $C \subseteq [-1,1]^2$.

· C ~~est fermé : soit $(\cos t_n, \sin t_n)$ suite dans C $\to (x,y) \in \mathbb{R}$.~~

~~alors $\cos t_n \to x$ $t_n \to t$, et cos, sin cont.~~

~~$\sin t_n \to y$ donc $\cos t_n \to \cos t_1$~~

~~$\sin t_n \to \sin t_1$~~.

~~Autre façon $C = \{(x,y) \in [\cos 1, 1] \times [0, \sin 1],\ x^2+y^2 = 1\}$~~

~~$C = f^{-1}(\{1\})$ pour $f : [\ ] \times [\ ] \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^2+y^2$~~

· D ~~$= \{(\cos t, \sin t),\ t \in]0,1]\}$~~

~~$\{\cos t,\ t \in [0,1]\}$ fermé $= f^{-1}([\cos^{-1} 1, 1])$~~

~~pour $f : [0,1] \to$, $t \mapsto \cos t$~~

$\{(\cos t, \sin t),\ t \in [0,1]\}$

$= \{(x,y),\ x^2+y^2 = 1\} \cap [\cos^{-1} 1, 1] \times ..$

$x \in [\cos^{-1} 1, 1]$

sup $\exists\ (X^{n_k})$ de $(X^n) \to P \in \mathbb{R}[X]$

$\deg P = d$ $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_d X^d$.

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2} \min\{|a_i|, 1\}$.

et on fixe N. alors si $k \geqslant \max(N,d)$

$(n_k \geqslant d, N)$.

$\| X^{n_k} - P \|_\infty = \max\{a_0, \dots, a_d, 1\}$

---

sup max $| X^{n_k} - P$.

coeff.

Pour toute ss suite (X^{n_k}) de (X^n)

n'y a pas non conv. P.

ε. $\forall N\ \exists n\ n \geqslant N$. $| X^{n_k} - P | > \varepsilon$.

rmq : dans exo 1 on peut aussi montrer que

$(\cos t_n, \sin t_n) \to (l, l')$ alors $t_n \to x \in [0,1]$

et donc $l = \cos x$

$l' = \sin x$

en effet si $\cos t_n \to l \in [-1,1]$

on note $y_n = \cos t_n$ et on considère $\cos^{-1} : [-1,1] \to [0,\pi]$

continue. Alors $\cos^{-1}(y_n) \to \cos^{-1}(l)$

$t_n \to \cos^{-1}(l)$

puisque $[0,1]$ fermé alors $\cos^{-1}(l) \in [0,1]$

i.e $l = \cos x$ avec $x \in [0,1]$. De même pour $\sin t_n$.

EX 4 - 4) $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \neq \emptyset$

$d(A,B) = \inf \{ d(a,B), a \in A \}$

$$\inf_{\substack{a\in A \\ b \in B}} \{ d(a,b) \} = \inf_{b \in B} \{ \inf_{a \in A} d(a,b) \} = \inf_{a} \{ d(a,B) \}$$

CERTIFICAT DE NON-CONTRINDICATION A LA PRATIQUE D'UN SPORT

Je soussigné, Docteur PATRICK TERRASSE, certifie avoir examiné

CARRIZOSA PILLONI Joaquin, né le 03/09/2010,

et n'avoir pas constaté, à ce jour, de signe clinique apparent contre-indiquant la pratique du ou des sports(s) suivants(s) à l'entraînement et en compétition : judo, tennis.

A LYON

Le 27/06/2017