2016/2017 — Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I — Topologie et théorie de la mesure

Feuille d'exercices VIII.

Fonctions convexes

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f\colon I \to \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $a < b \in I$ et tout $x \in [a,b]$ on a $f(x) \leq f(a) + \dfrac{x-a}{b-a}(f(b)-f(a))$.
En déduire une preuve de l'inégalité des pentes.

Exercice 2. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ e^x \geq 1+x$.
2. $\forall x > 0\ \ln(x) \leq x-1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. 1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f\colon I \to]0,+\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $]-1,+\infty[$.

Exercice 5. Soit f, g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 6. Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 7. Montrer que si f est une fonction convexe définie sur un intervalle ouvert et à valeurs réelles, et a est un minimum local de f, alors a est un minimum global.

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 9. Soit f une fonction de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0\ f''(x) \geq af(x) \geq 0\ .$$

1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

Exercice 10. Soit a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a+b+c+d=1$. Montrer que

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a} \geq \frac{1}{2} .$$

$a \cdot \frac{\cancel{a}1}{1+\frac{b}{a}} + b\,\frac{1}{1+\frac{c}{b}} + \dots$

Indication : utiliser l'identité $\frac{x^2}{x+y} = x\frac{1}{1+\frac{y}{x}}$ et utiliser (après l'avoir justifiée...) la convexité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice 11. Soit ABC un triangle dans le plan, d'angles a, b, c. Montrer qu'on a les inégalités suivantes :

1. $\sin(a)+\sin(b)+\sin(c) \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.
2. $\cos(a)+\cos(b)+\cos(c) \leq \frac{3}{2}$.

Indication : combien vaut $a+b+c$? Pour la deuxième inégalité, on pourra supposer $a \geq b \geq c$ et distinguer les cas $a \leq \frac{\pi}{2}$ et $a \geq \frac{\pi}{2}$.

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

EX1 : I int $\subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$.

f convexe $\iff \forall\, a<b \in I$, $\forall\, x \in [a,b]$

$$f(x) \leq f(a) + \frac{x-a}{b-a}\,(f(b)-f(a)).$$

def : $\forall\, \lambda \in [0,1]$, $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

prop ~~def~~ : inégalité des pentes : $\forall\, a<b<c \in I$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

• $x = \lambda a + (1-\lambda) b$

$$f(a) + \cancel{\frac{\lambda a + (1-\lambda) b}{b-a}}\,(f(b)-f(a))$$

$$= \cancel{(b-a) f(a) + (\lambda a + (1-\lambda) b)(f(b)-f(a))}$$

$$= \cancel{f(a)\,(b - a + \lambda a + (1-\lambda) b) + \lambda a + (1-\lambda) b\, f(b)}$$

$$= f(a) + \frac{\lambda a + (1-\lambda) b - a}{b-a}\,(f(b)-f(a))$$

$$= (b-a) f(a) + \frac{-a(1-\lambda) + (1-\lambda) b}{b-a}\,(f(b)-f(a))$$

$$= \cancel{(b-a)} f(a) + \frac{(1-\lambda)(-a+b)}{b-a}\,(f(b)-f(a))$$

$$= f(a) + (1-\lambda)(-f(a)+f(b))$$

$$= \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Reste à montrer $x \in [a,b] \iff \exists\, \lambda \in [0,1]$, $x = \lambda a + (1-\lambda) b$.

si $a \le x \le b.$ $\quad x = a + \varepsilon \quad 0 \le \varepsilon \le b-a$

$$\lambda = \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

$$\begin{aligned} x &= a + \lambda(b-a). \\ &= a + \lambda b - \lambda a \\ &= a(1-\lambda) + \lambda b. \end{aligned}$$

~~Soit~~

$a \le x \le b \quad \Longleftrightarrow \quad x = b - \varepsilon$ avec $0 \le \varepsilon \le b-a.$

~~ceci~~ on pose $\lambda = \frac{\varepsilon}{b-a}.$ $(0 \le \lambda \le 1)$

$$\Rightarrow \quad x = b - \lambda(b-a)$$

$$\Rightarrow \quad x = \lambda a + b(1-\lambda).$$

si $x = \lambda a + (1-\lambda) b$ avec $\lambda \in [0,1]$.

$$\begin{aligned} x - a &= \lambda a + (1-\lambda)b - a \\ &= a(\lambda - 1) + (1-\lambda) b \\ &= (1-\lambda)(b-a) \geqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad b - x &= b - \lambda a - (1-\lambda) b \\ &= b - \lambda a - b + \lambda b \\ &= \lambda (b-a) \geqslant 0. \end{aligned}$$

<u>Inégalité des pentes</u> : $\quad a < b < c \in I$

. on applique à $b \in [a, c]$. $\Rightarrow f(b) \le f(a) + \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$

$$\Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \le \frac{f(c) - f(a)}{c-a}$$

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

<u>Ex2</u> : 1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$

$f(x) = e^x$ convexe sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ (car croissante)

et donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on considère I int cont 0 et x.

on a $f(x) \geq (x-0)\, f'(0) + f(0)$

$\cancel{f(x)}\ e^x \geq x + 1.$

2) $\forall x > 0, \quad \ln(x) \leq x - 1.$

$\cancel{\forall}$ sur tout intervalle I de $]0, +\infty[$, $f(x) = \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{x}$ ~~>0~~ ~~donc croissant~~

$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0, +\infty[$ donc

f est concave i.e $-f$ convexe donc sur $]0, +\infty[$

donc $-\ln(x) \geq -(x-y)\frac{1}{y} \cancel{+ f(y)} \ln y.$

~~on pose~~ sur $y \in$ intervalle I contenant x.

on pose $y = 1$ et on a

$-\ln(x) \geq (1-x) \Rightarrow \ln x \leq x - 1.$

3) $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x.$

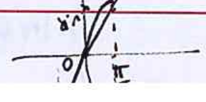
$\sin x$ est concave entre $[0, \frac{\pi}{2}]$ (car $\overset{f''(x)}{\overset{\shortparallel}{-\sin x}} \leq 0$).

on a donc $-\sin x \geq -(x-y)\cos y + \sin y \qquad y \in [0, \frac{\pi}{2}]$

on prend $y = 0$ et on a $\sin x \leq x$.

Le graphe d'une fonction concave est au dessus de ses cordes et la droite $y = \frac{2}{\pi} x$ est la corde joignant les pts d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$ d'où $y = \frac{2}{\pi}x$.

$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$



4) $\forall x > -1 \quad \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$

$f(x) = \sqrt{1+x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \qquad f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} < 0.$ sur $]-1,+\infty[$

donc f est concave ~~sur~~. on a donc

$\forall y, x \in I \subseteq]-1,+\infty[, \quad \sqrt{1+x} \ \cancel{\leq}\ \geq -(x-y) f'(y) - f(y)$

$]-1,+\infty[\qquad \sqrt{1+x} \ \cancel{\geq}\ \leq (x-y) f'(y) + f(y)$

on applique à $y=0 \qquad \sqrt{1+x} \leq x \cdot \frac{1}{2} + 1$

<u>EX 3</u> $\quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \qquad f'(x) = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}.$

donc f sera croissante sur $\mathbb{R}$ ssi $xe^x - e^x + 1 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

on a vu $\quad e^x \geq x+1$ déjà $\forall x \in \mathbb{R}$ d'où

$xe^x - e^x + 1 = e^x(x-1) + 1 \geq (x+1)(x-1) + 1 = x^2 \geq 0$

<u>EX 4</u> $\quad$ 1) $\quad f(x) = e^{2x - \cos x}, \ x \in \mathbb{R}$. Voyons f convexe :

calculons $\quad f'(x) = (2 + \sin x)\, e^{2x - \cos x}.$

et ~~$f''(x)$~~ $= f''(x) = \cos x\, e^{2x-\cos x} + (2+\sin x)^2 e^{2x - \cos x}$

$= (\cos x + (2+\sin x)^2)\, e^{2x - \cos x}.$

Mais $\quad 1 \leq 2 + \sin x \leq 3 \quad$ et donc

$1 \leq (2+\sin x)^2 \leq 9$

d'où $\quad (2+\sin x)^2 + \cos x \geq 0. \quad$ et donc

$f'(x)$ croissante et $f(x)$ convexe.

2) $\quad f : I \to]0,+\infty[, \quad I \subseteq \mathbb{R} \quad$ tq $\ln(f)$ convexe.

Mq f est convexe : Soit $I = [a,b]$, $\lambda \in [0,1]$

Puisque $\ln(f)$ convexe $\quad \ln\circ f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda \ln\circ f(a) + (1-\lambda)\ln\circ f(b)$

et puisque $\ln$ est concave.

$\lambda \ln(f(a)) + (1-\lambda)\ln(f(b)) \leq \ln(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b))$

Ensuite puisque $\ln$ est croissante $\quad$ ~~ln~~ $f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

et donc f est convexe.

La réciproque est fausse puisque $f(x) = e^{2x - \cos x}$ convexe

et $\ln f = 2x - \cos x$ n'est pas convexe.

3) Mq $x \mapsto (1+x)^x$ convexe sur $]-1, +\infty[$

$g(x) = \ln (1+x)^x = x \ln(1+x)$

$g'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$

$g''(x) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1+x-x}{(1+x)^2} = \dfrac{2+x}{(1+x)^2} > 0$ sur $]-1, +\infty[$

donc g est convexe et donc $x \mapsto (1+x)^x$ convexe.

Ex 5 : $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f convexe, g convexe et croissante.

Mq $g \circ f$ est convexe.

Soit $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $\lambda \in [0,1]$.

f convexe : $f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$

g croiss : $g \circ f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b))$

g conv : $g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) \leq \lambda\, g \circ f(a) + (1-\lambda)\, g \circ f(b)$

$\Rightarrow g \circ f(\lambda a + (1-\lambda) b) \leq \lambda\, g \circ f(a) + (1-\lambda)\, g \circ f(b)$

$\Rightarrow$ g convexe.

Ex 6 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Mq $f \geq 0$.

i.e $\forall \varepsilon > 0$ $\exists X$ tq $\forall x > X$, $|f(x)| < \varepsilon$.

Sup $\exists x_0$ tq $f(x_0) < 0$ et posons $\varepsilon = |f(x_0)|$ alors

$\exists$ $x_1 > x_0$ tq $|f(x_1)| < \varepsilon = -f(x_0)$

on a donc $f(x_0) < -|f(x_1)|$

et alors $f(x_0) < f(x_1)$.

on applique l'inégalité des pentes pour tout $x \geq x_1$

et donc $x_0 < x_1 < x$

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow f(x) \geq f(x_0) + (x-x_0)\frac{(f(x_1)-f(x_0))}{x_1-x_0}.$$

et on a donc puisque $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \geq 0$

que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ⇝.

EX 7 : f convexe sur I ouvert.

a = minimum local de f, voyons a minimum global

Soit $c > a$. Puisque a min. loc $\exists$ $b \in]a, c[$ tq

$f(b) \geq f(a)$. Par l'inégalité des pentes.

$$0 \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \quad \text{d'où} \quad f(c) \geq f(a).$$

De même si $a > c$ on trouve $b \in]c, a[$ tq

$f(b) \geq f(a)$ et inégalité des pentes :

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c} \leq \frac{f(a)-f(c)}{a-c} \leq \frac{f(a)-f(b)}{a-b} \leq 0$$

d'où $f(a)-f(c) \leq 0 \Rightarrow f(c) \geq f(a)$ ~~et f(a)~~ et a minimum global.

EX8 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe

1) on suppose $f \leq 0$. Mq f est constante

soit $a < b$ et supposons $f(a) \neq f(b)$

• si $f(a) < f(b)$ pour tout $x \geq b$ on a $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

et donc $f(x) \geq (x-a)\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{} + f(a)$ et donc $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

• si $f(a) > f(b)$ $\forall\, x \leq a$. on T_a $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

donc $f(x) \geq -(b-x)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(b)$

$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ ⇝. d'où f constante.

Feuille d'exercices IX.

Espaces vectoriels munis d'un produit scalaire ; espaces métriques complets ; espaces de Hilbert.

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

1. Rappeler et vérifier l'identité de polarisation.
2. Faire un dessin, énoncer et vérifier l'identité du parallélogramme.
3. Montrer que le produit scalaire définit une application continue de $E \times E$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 2. 1. Montrer que, si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, alors $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par

$$\langle f, g \rangle = \int_X f g d\mu$$

est un produit scalaire sur $L^2(X)$.

2. À quoi correspond la norme associée ?
3. Pour $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ où μ est la mesure de comptage, décrire $L^2(\mathbb{N})$, le produit scalaire et la norme associés. On note cet espace de Hilbert, $l^2(\mathbb{N})$.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Montrer que, pour $A \subseteq E$:

1. $A^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $A^{\perp}$ est fermé dans E.
3. $A^{\perp} = (\overline{A})^{\perp}$.

Exercice 4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Montrer que, si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs de E on a pour tout $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ et tout $i_1, \dots, i_n \in I$

$$\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \|a_{i_k}\|^2 .$$

Remarquer que le théorème de Pythagore est un cas particulier de l'égalité ci-dessus.

Exercice 5. On se place dans l'espace $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ muni du produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x) dx$. On considère la famille $(u_k)_{k \geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthogonale.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que toute suite convergente est de Cauchy, et que la réciproque est fausse en général (on pourra par exemple considérer la suite définie par $x_n = 2^{-n}$ dans l'espace $X =]0, +\infty[$ muni de sa distance usuelle).

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite de Cauchy d'éléments de X. Montrer que (x_n) est bornée.

Exercice 8. Soit $(E, \| \cdot \|)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $F \subseteq E$ un sous-espace de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E.

Exercice 9. Soit (X,d) un espace métrique complet, et $f\colon X \to X$ une application telle que

$$\exists k < 1\ \forall x \neq y \in X \quad d(f(x), f(y)) \leq k d(x,y)\ .$$

Montrer que f est continue et admet un unique point fixe.

Exercice 10. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que $L^\infty(X)$ est un espace complet.

Exercice 11. Soit E un espace de Hilbert. Montrer qu'un sous-espace vectoriel F de E est dense dans E si, et seulement si, $F^\perp = \{0_E\}$.

Exercice 12. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale de vecteurs d'un espace de Hilbert E. Montrer que $(a_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de E si, et seulement si,

$$\forall x \in E \quad (\forall i \in I\ \langle x, a_i\rangle = 0) \Leftrightarrow x = 0_E\ .$$

Exercice 13. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace de Hilbert. Montrer que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

et refaire 7.

Exercice 14. Soit A une partie compacte d'un espace métrique (X,d). Montrer que pour tout $x \in X$ il existe $a_0 \in A$ tel que $d(x, a_0) = d(x, A)$ où $d(x,A) = \inf\{d(x,a)\colon a \in A\}$.

Exercice 15. On considère $E = C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme (on pourra considérer deux fonctions f et g de normes 1 tel que $f+g$ et $f-g$ soient également de norme 1). En déduire que $\|\cdot\|_\infty$ n'est associée à aucun produit scalaire sur E.
2. Montrer que $(E, \|\cdot\|_\infty)$ est complet.
3. On considère $F = \{f \in E\colon f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(x)dx \geq 1\}$.
   (a) Montrer que F est fermé.
   (b) Montrer que F est convexe.
   (c) Montrer que pour tout $f \in F$, on a $\|f\|_\infty > 1$.
   (d) Montrer que $\inf_{f\in F} \|f\|_\infty = 1$.
   (e) En déduire que $d(0_E, F)$ n'est pas atteinte.

Exercice 16. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire possédant une famille orthonormale $(e_n)_{n>0}$. On considère $F = \left\{(1+\dfrac{1}{n})e_n\colon n > 0\right\}$.

1. Montrer que 0_E n'a pas de projection sur F.
2. Montrer que pour tout $n \neq m$, $\|(1+\dfrac{1}{n})e_n - (1+\dfrac{1}{m})e_m\| \geq 1$. En déduire que F est fermé.
3. Expliciter un tel exemple pour l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$.

Exercice 17. On considère un triangle équilatéral dans $\mathbb{R}^2$. Montrer que son centre de gravité a trois projections.

Exercice 18. Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé non réduit à $\{0_E\}$. Notons p la projection de E sur F.

1. Vérifier que $p \circ p = p$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in E$, on a $\langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$.
3. Montrer que $\|p\| = 1$ (on rappelle que par définition $\|p\| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|p(x)\|$).

Exercice 19. Vérifier que les vecteurs $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (0,1,2)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. Utiliser le procédé de Gram-Schmidt sur cette base pour obtenir une base orthonormale.

Exercice 20. Un théorème d'approximation de Weierstrass montre que toute fonction réelle définie et continue sur $[-1,1]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales à coefficients rationnels. Notons que l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients rationnels est dénombrable. En déduire que l'espace de Hilbert $(C([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est séparable.

Exercice 21 (Polynômes de Legendre). On se place dans l'espace de Hilbert $(C([-1,1],\mathbb{R}),\|\cdot\|_2)$.

1. En utilisant l'exercice précédent et le procédé de Gram-Schmidt, montrer qu'il existe une base hilbertienne $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la fonction p_n est une fonction polynomiale de degré n.
2. Pour $n\in\mathbb{N}$, on considère la fonction polynomiale l_n définie par $l_n(t)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(t^2-1)^n$ pour $t\in[-1,1]$ (polynômes de Legendre).
   (a) Montrer que la famille $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale.
   (b) Déterminer le degré de l_n pour chaque n.
   (c) En déduire que pour chaque n on a $p_n=\dfrac{l_n}{\|l_n\|}$.

Exercice 22. Soit E un espace de Hilbert possédant une base hilbertienne dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$. On considère la partie A des combinaisons linéaires finies de $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels. Notons que A est dénombrable. Montrer que A est dense dans E

Exercice 23. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f définie sur $[-\pi,\pi]$ par $f(x)=x$. A l'aide de l'égalité de Parseval, en déduire l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,.$$

Chap 10 Espaces hilbert

EX2 : $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mesuré $\quad \langle f, g\rangle = \int_X fg\, d\mu$ sur $L^2(X)$

1) $\langle f, g\rangle = \langle g, f\rangle$ symét.

$\langle \lambda f_1 + f_2, g\rangle = \int_X (\lambda f_1 + f_2) g\, d\mu = \lambda \int_X f_1 g\, d\mu + \int f_2 g\, d\mu$ prop. int.

$\langle f, f\rangle = \int_X f^2 d\mu \geq 0$ et $\int f^2 d\mu = 0 \Rightarrow f^2 = 0$ pp.

2) $\|f\| = \int_X f^2 d\mu$

3) $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ μ = mesure de comptage

on veut comprendre $\int f^2 d\mu < \infty$. or on

considère $f_n^2(i) = \begin{cases} f^2(i) & i \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

la suite $(f_n^2(i))$ croissante $\to f^2(i)$ théo conv monot.

$\int_{\mathbb{N}} f^2 d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n^2 d\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f^2(i) = \sum_{i=0}^{\infty} f^2(i)$

d'où $\int_{\mathbb{N}} f^2 d\mu < \infty \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{\infty} f^2(i) < +\infty$.

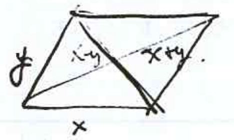
$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{N}} fg\, d\mu = \sum_{i=0}^{\infty} f(i)g(i)$

$\|f\| = \sum_{i=0}^{\infty} f^2(i)$.

EX1 : 1) Polarisation : $4\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$

2) Parallélogramme : $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

i.e somme carrés des ~~k~~ diag = somme carrés des côtés



à partir de polarisation : $4\langle x,y\rangle + 2\|x-y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$

$4\langle x,y\rangle + 2\|x\| + 2\|y\|^2 - 4\langle x,y\rangle = \dots$

$2\|x\| + 2\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$ □

3) $x_n \to x$, $y_n \to y$ suites conv. Voyons $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$:

$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x,y\rangle| = |\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y_n\rangle + \langle x,y_n\rangle - \langle x,y\rangle|$

$\cancel{\leq |\langle x, y_n - y\rangle| + |x, y_n}$

$\leq |\langle x_n - x, y_n\rangle| + |\langle x, y_n - y\rangle|$

$\leq \|x_n - x\|\|y_n\| + \|x\|\|y_n - y\|$

Comme y_n convergente $\|y_n\|$ bornée

si $\|\cdot\|$ continue alors $|\langle x_n,y_n\rangle - \langle x,y\rangle| \to 0$

$\Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$.

D'autre part $\|\cdot\|$ continue ! car $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

lipschitz → continue.

EX3. $A \subseteq E$

1) $A^\perp = \{x\in E,\ \forall a \in A,\ \langle a,x\rangle = 0\}$

$x, y \in A^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall a \in A$ $\langle a, x+\lambda y\rangle = \langle a,x\rangle + \lambda\langle a,y\rangle = 0$

2) $A^\perp$ fermé dans E $x_n \to x$ $x_n \in A^\perp$, $x \in E$

$\forall a \in A$ $\langle x,a\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, a\rangle = 0$. $\to x \in A^\perp$.

car $\langle,\rangle$ cont.

3) $A^\perp = (\overline{A})^\perp$.

. on a naturellement $A^\perp \supseteq (\overline{A})^\perp$ car si $a \in A$ et $x \in (\overline{A})^\perp$

alors $a \in \overline{A}$ $(A \subseteq \overline{A})$ et $\langle x,a\rangle = 0$ $\Rightarrow x \in A^\perp$.

. Pour $A^\perp \subseteq (\overline{A})^\perp$ soit $x \in A^\perp$ et $a \in \overline{A}$

alors $\exists$ a_n suite de A tq $a_n \to a$. On suit

$0 = \langle x, a_n\rangle$ a on prend lim. $0 = \lim \langle x, a_n\rangle = \langle x, a\rangle \Rightarrow x \in (\overline{A})^\perp$

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

Ex 4 — $(a_i)_{i\in I}$ famille orthogonale de vect. de E

Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $i_1, \dots, i_n \in I$

$$\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \|^2 = \langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_{i_k} \rangle$$

on pose $v = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k a_{i_k}$ $\quad = \langle v + \lambda_n a_{i_n}, v \lambda_n a_{i_n} \rangle$

$$= \|v\|^2 + 2\lambda_n \langle v, a_{i_n} \rangle + \lambda_n^2 \|a_{i_n}\|^2$$

$$= \|v\|^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \lambda_n \lambda_k \langle a_{i_k}, a_{i_n} \rangle + \lambda_n^2 \|a_{i_n}\|^2$$

$$= \|v\|^2 + \lambda_n^2 \|a_{i_n}\|^2$$

par récurrence si $n = 1$ v.

on suppose vrai pour $n-1$ $\Rightarrow$ $\|v\|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{i_k}^2 \|a_{i_k}\|^2$

et on en déduit le résultat.

Ex 5. $L^2([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^1 fg \, dx$.

$(u_k)_{k \geq 1}$ $u_k(x) = \sin(k\pi x)$ $\forall x \in [0,1]$, $k \geq 1$.

~~voyons~~ on calcule $l \neq k$ $\int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(l\pi x) \, dx$

en utilisant $\sin a \sin b = \frac{1}{2} \cos(a-b) - \frac{1}{2} \cos(a+b)$.

donc $\langle u_k, u_l \rangle = 0$ si $k \neq l$.

si $k = l$ $\int_0^1 \sin^2(k\pi x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0 (1 - \cos 2k\pi x) \, dx$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2k\pi} \sin 2k\pi x \right]_0^1 = 1.$$

$\|x_n - x\|$

EX6 a) soit $\varepsilon > 0$ on prend $\frac{\varepsilon}{2}$ $\exists N$ tq $\forall n \geq N$ $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$

d'où $\forall m, n \geq N$ $d(x_m, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ et

$\underbrace{d(x_n, x_m)}_{\|x_n - x_m\|} \leq \underbrace{d(x_n, x) + d(x, x_m)}_{\|x_n - x\| + \|x - x_m\|} < \varepsilon$.

Réciproque fausse : $X =]0, +\infty[$ $x_n = 2^{-n}$ $x_n \to 0 \notin X$

donc ne converge pas dans X. ~~ana~~ soit $\varepsilon > 0$ on veut n tq $\forall k \geq 0$

$|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon \iff \left| \frac{2^k - 1}{2^{n+k}} \right| < \varepsilon \Rightarrow (n+k)\ln 2 > \ln(2^k - 1) - \ln \varepsilon$

$n > \frac{1}{\ln 2} \ln\left(\frac{2^k - 1}{\varepsilon}\right) - k$.

donc x_n de Cauchy.

EX7 ~~a~~ $\varepsilon = 1$ soit N tq $\forall n, m \geq N$ $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

alors $\forall n$ $x_n \in B(x_N, \varepsilon) \cup \{x_0, \dots, x_{N-1}\}$ qui est bornée

EX8 $(E, \|\cdot\|)$ $\mathbb{R}$ esp. vect, $F \subseteq E$ ss esp. vectoriel dim finie.

soit $e_1, \dots, e_p$ base de F.

~~(x_n) suite de F tq $(x_n) \to x$, $x \in E$~~

$x_n = \cancel{a_1^{(n)} e_1 + \dots + a_p^{(n)} e_p}$

Tout élément de $F \to$ p-uplet de $\mathbb{R}^p$. et $(\mathbb{R}^p, \|\ \|)$ complet

avec $\|(x_1, \dots, x_n)\| := \|x_1 e_1 + \dots + x_p e_p\|$

$\Rightarrow$ F fermé dans E par prop 10.19.

EX9 (X, d) métrique complet, $f : X \to X$ tq

$\exists k < 1$ $\forall x \neq y \in X$ $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y)$

- f continue : soit $y \in X$ $\varepsilon > 0$ on prend $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$

(si $k = 0$ f constante donc continue et admet un unique pt fixe)

alors $\forall$ $x \neq y$ $d(f(x), f(y)) \leq k\, d(x, y) \leq \varepsilon$.

tq $d(x, y) < \delta$

si $x = y$. $d(f(x), f(y)) = 0 \leq \varepsilon$.

- f admet un unique pt fixe

(unicité évidente d'après) : on supp pas de pt fixe.

- $u_n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x)$ on montre que u_n de Cauchy.

$\Rightarrow$ converge vers l $\Rightarrow$ $\lim f^n(x) = l$

$\Rightarrow$ $f(\lim f^n(x)) = f(l)$

$\Rightarrow$ par cont. $\lim f \circ f^n(x) = f(l)$

$l = f(l)$

d'où l pt fixe.

EX 11 – E espace de Hilbert. Mq F ss e.v de E est dense dans E ssi $F^\perp = \{0_E\}$.

On a vu que $F^\perp$ fermé et $(\overline{F})^\perp = F^\perp$.

Si F dense $\overline{F} = E \Rightarrow (\overline{F})^\perp = \{0_E\} \Rightarrow F^\perp = \{0_E\}$

Réciproquement, $(\overline{F})^\perp = \{0_E\} \Rightarrow \overline{F} = E \Rightarrow F$ dense

EX 12 – $(a_i)_{i\in I} \in E$ Voyons $F = \langle (a_i)_{i\in I} \rangle$ dense dans E ssi $\forall x \in E \left(\forall i \in I,\ \langle x, a_i \rangle = 0\right) \Leftrightarrow x = 0_E$ $(*)$

Par exo 11 si F dense $\Leftrightarrow F^\perp = \{0_E\}$ ~~donc~~

"$\Rightarrow$" Soit $x \in E$ tq $\langle x, a_i \rangle = 0$ $\forall i \in I$.

Soit $f \in F \Rightarrow f = \sum_{j=1}^{N} \lambda_i a_{i_j} \Rightarrow \langle x, f \rangle = 0 \Rightarrow x \in F^\perp \Rightarrow x = 0_E$

"$\Leftarrow$" Supposons $(*)$ vérifiée et $x \in F^\perp$ en particulier $\forall i \in I\ \langle x, a_i \rangle = 0 \Rightarrow x = 0_E \Rightarrow F^\perp = \{0_E\}$ et F dense.

EX 13 F ss ev de E. Mq $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$

. Soit $x \in F$ et $y \in F^\perp$ $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow x \in (F^\perp)^\perp$. d'où $(F \subseteq (F^\perp)^\perp)$

et $(F^\perp)^\perp$ fermé donc $\overline{F} \subseteq (F^\perp)^\perp$.

. ~~Soit xxxx On sait $x \in \overline{F}$ ssi $\exists$ suite $(x_n) \in F$ $x_n \to x$~~

montrer les 2 sens.

D'autre part on a $\overline{F} \oplus (\overline{F})^\perp = E$ et

$(F^\perp) \oplus (F^\perp)^\perp = E$

$\Rightarrow \overline{F} = (F^\perp)^\perp$ compl. orth. est unique

EX 19 $e_1 = (1,1,1)$ $e_2 = (1,1,-1)$ $e_3 = (0,1,2)$ base dt.

$$e_1' = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \frac{1}{\sqrt3}(1,1,1)$$ $\langle e_2, e_1\rangle = 1$

$$e_2' = \frac{e_2 - \langle e_2, e_1^*\rangle e_1^*}{\|e_2 - \langle e_2,e_1\rangle e_1\|} = \cancel{\frac{(0,0,-2)}{\|(0,0,-2)\|}} = (0,0,-1)$$

$$= \frac{e_2 - \langle e_2, e_1'\rangle e_1'}{\| \quad \|}$$ $\langle e_2, e_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt3}\langle e_2, e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt3}$.

$$e_2 - e_1'\cdot\frac{1}{\sqrt3} = e_2 - \frac{e_1}{3} = \frac13(3e_2 - e_1) = \frac12(2,2,-4) = (1,1,-2).$$

$$e_2' = \boxed{\frac{(1,1,-2)}{\sqrt6}}.$$

on calcule $\langle e_3, e_1'\rangle = \frac{1}{\sqrt3}3$

$\langle e_3, e_2'\rangle = \frac{1}{\sqrt6}(-3)$

~~$e_2' \cdot e_1' = \frac13(2+1+-2)$.~~

$$e_3' = \frac{e_3 - \langle e_3,e_1'\rangle e_1' - \langle e_3,e_2'\rangle e_2'}{\|e_3 - \langle \quad\rangle e_1' - \langle \quad \rangle e_2'\|} = \frac{1}{\|\cdots\|}\left(e_3 - e_1 + \frac12 (1,1,-2)\right)$$

$$= \frac{\frac12(-1,1,0)}{\|\frac12(-1,1,0)\|} = \frac12(-1,1,0)\cdot\frac{2}{\sqrt2} = \frac{1}{\sqrt2}(-1,1,0).$$

EX 20 Thm Weier : $\forall$ fct réelle déf et cont sur $[-1,1]$ est lim. uniforme de fct polynom. à coeff rationnels. Mq $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est séparable.

On ~~peut~~ considère la suite $(t^n) \in \mathbb{R}[t]$. ~~+ poly. à coeff~~ (famille dénombrable)

Voyons que si $\int t^n f(t) = 0$ $\forall f \in \mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R})$ alors $f(t) = 0$.

On sait $\exists$ (P_n) suite de fct. polynom. à coeff rat tq $\|P_n - f\|_\infty \to 0$. i.e $\int_{[-1,1]} P_n f(t) \to 0$.

On écrit $\|f\|_2^2 = \int_{[-1,1]} f^2\,dt = \int_{[-1,1]} f(f-P_n)\,dt + \int_{[-1,1]} f P_n\,dt$

(car si $\int_{[-1,1]} f t^m = 0$ $\forall m$ $\int_{[-1,1]} f P_n = 0$

$= \int f(f-P_n)\,dt$

$\leq \|f\|_\infty \|f-P_n\|_\infty \to 0.$ $\Rightarrow f^2 = 0 \Rightarrow f = 0$.

D'où la famille $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense et dénombrable dans $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$

EX21 Polynômes de Legendre

1) On a vu que la famille $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dense dans $(\mathcal{C}([-1,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$. On va l'orthonormaliser Gram-Schmidt par récurrence à partir de $(1,t,t^2,\dots)$

~~Pour~~ Pour $n=0$ on calcul $\int_{-1}^{1} 1^2\,dt = 2$

et on pose $P_0 = \frac{1}{2}$ P_0 de degré 0 et vérifie $\|P_0\|_2 = 1$.

On suppose qu'on a construit $P_0,\dots,P_n$. On construit

alors $\tilde{P}_{n+1} = t^n - \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{-1}^{1} t^{n} P_k(t)\,dt\right) P_k(t)$

et on pose

$$P_{n+1} = \frac{\tilde{P}_{n+1}}{\|\tilde{P}_{n+1}\|_2}$$

. Il s'agit bien d'un pol. de degré n, orthog. à tous les $P_0,\dots,P_n$ et de norme 1.

2) On pose $l_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}\left((t^2-1)^n\right)$ pour $t\in[-1,1]$.

b)a) Voyons que c'est une famille orthogonale

$(t^2-1)^n = (t-1)^n(t+1)^n$ on pose $f(t) = (t-1)^n$ $g(t) = (t+1)^n$

$l_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t)$. D'autre part

$f^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left((t-1)^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}(t-1)^{n-k}$ $g^{(n-k)}(t) = \frac{n!}{k!}(t+1)^k$

on a donc $l_n(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (t-1)^{n-k}(t+1)^k$

ℓ_n est la dérivée n d'un pol de dg $2n$ donc de degré n.

Voyons que $\langle \ell_n, Q\rangle = 0$ si $\deg Q < n$. Posons $\ell_n = u_n^{(n)}$

Par IPP $u' = u_n^{(n)} = \ell_n$ $\quad u_n^{(n-1)} = u$

$v = Q(t)$ $\quad v' = Q'(t)$

$$\langle P_n, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P_n Q \, dt = \left[u_n^{(n-1)} Q(t) \right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} Q' u_n^{(n-1)} \, dt$$

1 et −1 sont des racines de multip. n de u_n donc ce sont des racines de $u_n'(t), \dots, u_n^{(n-1)}(t)$

on a donc

$$\langle P_n, Q\rangle = -\int_{-1}^{1} u_n^{(n-1)}(t) Q'(t) \, dt$$

on répète les int. pp jusqu'à épuiser Q

$$\langle P_n, Q\rangle = \int_{-1}^{1} u_n^{(n-2)}(t) Q''(t) \, dt = \dots = (-1)^n \int_{-1}^{1} u_n(t) Q^{(n)}(t) \, dt = 0.$$

(car $Q^{(n)}(t) = 0$)

c) ~~on montre~~ $\cancel{\ell'_{n+1} = (2n+1)\ell_n + \ell'_{n-1}}$

Soit (p_n) base hilbertienne trouvé avant.

on rappelle que $\deg P_n = n$.

puisque $\deg \ell_n = n$ alors $\ell_n = \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_n p_n$.

$\exists \alpha_0, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

~~et on vérifie~~ $\cancel{\forall i = 0, \dots, n \ \langle \ell_i, p_i\rangle = \alpha_i}$ ~~et mais~~

~~car~~ $\cancel{\langle \ell_i}$

$\forall i = 0, \dots, n \quad \langle \ell_n, p_i\rangle = \langle \alpha_0 p_0 + \dots + \alpha_i p_i, p_i\rangle = \alpha_i$ car les p_i orthog.

et d'autre part si $i < n$ $\quad \langle \ell_n, p_i\rangle = 0$

car $\deg P_i < n$ donc $\ell_n = \alpha_n p_n$

de plus $\|\ell_n\| = |\alpha_n| \, \|p_n\| = |\alpha_n|$

d'où $\quad p_n = \pm \dfrac{\ell_n}{\|\ell_n\|}$

EX 15 $\quad E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, norme $\| \ \|_\infty$

1) On prend $f = 1$ $g = x$, $\|f\|_\infty = 1$ $\|g\|_\infty = 1$

$\|f+g\|_\infty = \|1+x\| = 2$ et $\|f-g\|_\infty = \|1-x\|_\infty = 1$.

donc $5 = \|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 \neq 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 = 4$

Donc $\| \ \|_\infty$ n'est pas une norme "euclidienne"

2) Π_q $(E, \| \ \|_\infty)$ est complet. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de Cauchy.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists N$ tq $\forall n,m \geq N$ $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$.

Soit $x \in [0,1]$ on regarde la suite réelle $(f_n(x))$.

Alors $\forall n,m \geq N$
$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \{|(f_n-f_m)(x)|\} = \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

donc la suite $(f_n(x))_{n\geq N}$ est de Cauchy. Comme $\mathbb{R}$ est complet cette suite converge. Notons $f(x)$ sa limite. On définit ainsi une application $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Voyons que f est continue :

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (f_n) de Cauchy $\exists N$ tq $\forall n,m \geq N$ $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$ Donc $\forall x \in [0,1]$

$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$. on fait $m \to +\infty$.

$\lim |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. $\forall x$.

donc $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ i.e $f_n \to f$ uniformément

et puisque les f_n sont continues alors f continue, et $f_n \to f$ dans E.

3) $F = \{f \in E,\ f(0) = 0,\ \int_0^1 f(x)\,dx \geq 1\}$.

a) Soit $(f_n) \to f$ dans E (donc f_n conv unif vers f).
En particulier f est continue et puisque $f_n(0) \to f(0)$.
alors $f(0) = 0$. D'autre part $\int_0^1 f_n(x)dx \geq 1$. car par conv. dominée f_n conv donc bornée et sur un compact int. finie

$$\int_0^1 f\,dx = \lim \int_0^1 f_n(x)dx \geq 1$$

d'où $f \in F$ et F est fermé.

b) Soit $\lambda \in [0,1]$ et $f,g \in F$. Posons $h = \lambda f + (1-\lambda) g$.
on a donc $h(0) = 0$ et $\int_0^1 h\,dx = \lambda \int_0^1 f\,dx + (1-\lambda)\int_0^1 g\,dx \geq \lambda + (1-\lambda) = 1$.

c). Soit $M = \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} f(x)$. + petit maj ensemble s.

Alors $\forall^{pp} x \in [0,1]$ $f \leq M$

$$1 \leq \int_0^1 f\,dx \leq \int_0^1 M\,dx = M$$

si $M = 1$. alors $\int_0^1 f\,dx = 1$. donc $\int_0^1 (M-f)\,dx = 0$.

et puisque $M - f \geqslant 0$ alors $M - f = 0$. donc $M = f = 1$ presque partout.

mais $f(0) = 0$ d'où f n'est pas continue, c'est absurde. D'où $M > 1$.

e) Si $d(O_E, F)$ est atteinte on en déduit qu'il ~~la fct~~ existe une fct $f \in F$ tq $\|f\|_\infty = 1$. et donc $f \leq 1$ pp.

du coup on aurait comme avant $1 \leq \int_0^1 f \leq 1$

et $\int_0^1 1 - f = 0$. avec $1 - f \geqslant 0$ d'où $f = 1$ pp.

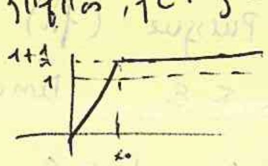
mais $f(0) = 0$ et f continue. $\lightning$

d) Voyons $\inf\{\|f\|_\infty, f \in F\} = 1$.

~~Supposons $M = \inf\{\|f\|_\infty, f\in F\}$~~ on va construire $f_n \in F$ tq $\|f_n\|_\infty = 1 + \frac{1}{n}$.

ainsi on voit bien si $n \to +\infty$ que $\inf\{\|f\|_\infty, f \in F\} = 1$.

on cherche f_n de la forme



donc si $0 \leq x \leq x_0$ $f_n(x) = ax$

avec $f_n(x_0) = 1 + \frac{1}{n}$. d'où $a = \frac{n+1}{n x_0}$. et $\underbrace{\int_0^1 f_n(x) = \int_0^{x_0} \frac{(n+1)}{n x_0} x\,dx + \int_{x_0}^1 \left(1+\frac{1}{n}\right) d}_{\geqslant 1}$

on en déduit $x_0 \leq \frac{2}{n+1}$ on prend donc $x_0 = \frac{2}{n+1}$

(on a bien $0 \leq x_0 \leq 1$ $\forall n \geqslant 1$. et f_n satisfaisant les hyp. de notre

Notons alors $m = d(y,F)$.

Alors $B_{y,\frac{m}{2}} = \{x \in E,\ \|y-x\| < \frac{m}{2}\}$. ouvert

et si $x \in B_{y,\frac{m}{2}}$ alors $\|y-x\| < \frac{m}{2}$

et donc puisque $\|y-x\| < m$ alors $x \notin F$. d'où $B_{y,\frac{m}{2}} \subseteq F^c$

et F^c ouvert donc F fermé.

3) Dans $L^2([0,1])$ $\quad e_k = \sin k\pi x$ famille orthonormale.

EX 13. E de Hilbert. F ssev fermé, $F \neq \{0_E\}$ $\quad p : E \to F$, $x \mapsto p_F(x)$.

1) $x \in E$. $\quad p(x) = y$ donc $y \in F$ et $x - y \perp F$

comme $p(x) \in F$ alors $d(p(x), F) = 0 = d(p(x), p(x))$

d'où $p(p(x)) = p(x)$ et $p \circ p = p$.

2) Comme E hil et F fermé alors $E = F \oplus F^{\perp}$

$x = x_1 + x_2 \quad x_1, y_1 \in F$

$y = y_1 + y_2 \quad x_2, y_2 \in F^{\perp}$

$\langle x, p(y)\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle = \langle p(x), p(y)\rangle$

$\langle p(x), y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$.

3) $\|p\| = \sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|p(x)\|$

Soit $y \in F$, et $x_0 = \frac{y}{\|y\|}$ alors $x_0 \in F$ et $\|x_0\| = 1$

$p(x_0) = x_0$ car $x_0 \in F$ et $\|p(x_0)\| = 1$ donc $\sup\limits_{\|x\|=1} \|p(x)\| \geq 1$.

D'autre part si $x \in E$ tq $\|x\| = 1$ $\quad x = x_1 + x_2 \quad x_1 \in F, x_2 \in F^{\perp}$

et $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 = 1$ d'où $\|x_1\|^2 = \|p(x)\|^2 \leq 1$

donc 1 borne sup pour les $\|p(x)\|$ avec $\|x\| = 1$ d'où

$\sup\limits_{\substack{x \in E \\ \|x\|=1}} \|p(x)\| \leq 1$. Alors $\|p\| = 1$.

EX 10. $L^\infty(X) = \{ f : X \to [0,+\infty[\ , \text{ tq } \|f\|_\infty < +\infty \}$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(X)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists N$ tq $\forall n,m \geq N$ $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$

i.e $\mu\{\underbrace{x \in X, \ |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty}_{S_{n,m}}\} = 0$ et $\|f_n - f_m\|_\infty$ + petit des maj. essentiels.

Puisque ~~...~~ $\mu\{\bigcup_{n,m\geq N} S_{n,m}\} = 0$ choisissons $x \in S = (\bigcup_{n,m\geq 1} S_{n,m})^c$ (presque tout $x \in (\bigcup S_{n,m})^c$)

alors $\forall n,m \geq N$ $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon$ d'où suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. $(\forall x \in S)$

Comme $\mathbb{R}$ complet cette suite est convergente. Notons $f(x)$ sa limite.

Ceci défini une fct $f : S \to [0,+\infty[$. donc aussi $f : X \to [0,+\infty[$ (car fct déf presque partout). Voyons maintenant que $\|f\|_\infty < +\infty$.

Or $\forall x \in S$ ~~...~~ et $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty < +\infty$

on prend lim : $\lim |f_n(x)| < +\infty$. et donc $|f(x)| < +\infty$

d'où $\mu\{x, \ |f(x)| = +\infty\} = 0$. et donc $\|f\|_\infty < +\infty$. □.

EX 14 : A compact $\subseteq X$, esp normé. Voyons $\forall x \in X$, $d(x,A)$ est atteinte i.e $\exists a_0 \in A$ tq $d(x,A) = \|x - a_0\| =$

Notons $m = d(x,A) = \inf\{\|x-a\|, a \in A\}$. Donc $m = \lim \|x - a_n\|$

sous-suite convg $a_{n_k} \to a_0 \in A$. et $m = \lim \|x - a_{n_k}\|$

on rentre limite. □. (ou juste dire $\|x - \cdot\| : A \to \mathbb{R}_+$ cont. et A compact donc atteint ses bornes)

EX 16 $(e_n)_{n\geq 0}$ famille orthogonale de E.

$F = \{(1 + \frac{1}{n})e_n, \ n > 0\}$.

1) Soit $x \in F$, $\|x - 0_E\| = \|(1+\frac{1}{n})e_n\| = 1 + \frac{1}{n}$

et $\inf \|x - 0_E\| = 1$. Sup $\exists y \in F$ tq $1 = \|(1+\frac{1}{n})e_n\| = (1+\frac{1}{n})$.

impossible. Donc 0_E n'a pas de projection.

2) $\forall n,m \ n \neq m$ $\|(1+\frac{1}{n})e_n - (1+\frac{1}{m})e_m\|^2 = (1+\frac{1}{n})^2 + (1+\frac{1}{m})^2 \geq 1$. car $\langle e_n, e_m\rangle = 0$ et $\langle e_i, e_i\rangle = 1$.

Voyons que si $y \notin F$, $d(y,F) \neq 0$. Si c'est le cas $\exists (x_n) \in F$ tq $\|x_n - y\| \to 0$. i.e $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N, \forall n \geq N$ $\|x_n - y\| \leq \varepsilon$.

Mais alors si $n,m \geq N$ $\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - y\| + \|y - x_m\| \leq 2\varepsilon$. ✓.

et.

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

~~Ex8~~ 2) $\exists a, b$ tq $f(x) \leq ax+b \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

On a vu que $\forall x_1 \in \mathbb{R}$

$$f(x) \geq f'_d(x_1)(x-x_1) + f(x_1) \quad \text{et}$$
$$f(x) \geq f'_g(x_1)(x-x_1) + f(x_1)$$

Mais si $ax+b \geq f(x) \geq cx+d$ alors $a=c$ (les droites sont parallèles)

d'où $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'_d(x) = f'_g(x) = a$

$\Rightarrow f$ est dérivable et $f'(x) = a \Rightarrow$.

$f(x) = ax + b'$ sur D.

Ex9 $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ majorée, de classe C^2.

$\exists a > 0$ tq $\forall x \geq 0 \quad f''(x) \geq a f(x) \geq 0$

1) Puisque $f''(x) \geq 0$ f est convexe sur tout intervalle ouvert de $[0,+\infty[$. On a donc ~~$\forall x>0$~~ $\forall x, y > 0$

$$f(x) \geq (x-y) f'(y) + f(y)$$

Si $f'(y) > 0$ alors ~~lim~~ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est impossible car bornée.

Donc $\forall y > 0 \quad f'(y) \leq 0$ et f est donc décroissante.

3) f décroissante minorée donc admet une limite en $+\infty$, L.

~~Or~~ Si $L > 0$ on a

$$0 < L \leq f \leq \frac{1}{a} f'' \Rightarrow \int_0^x L\,dt = Lx \leq \int_0^x f''(t)\,dt = \frac{1}{a}(f'(x) - f'(0))$$

$$\Rightarrow aLx + f'(0) \leq f'(x)$$

donc si $x \to +\infty$ $aLx \to +\infty$ et $f'(x) \to +\infty$ impossible car $f'(x) \leq 0$.

2) On sait f' croissante et on a vu $f'(x) \leq 0$ donc majorée par 0. elle admet donc une limite en $+\infty$, L'.

Si $L' < 0$ on a donc

$$f' \leq L < 0 \Rightarrow \int_0^x f'(t)\,dt = f(x) - f(0) \leq Lx$$

$$\Rightarrow f(x) \leq Lx + f(0)$$ et donc si $x \to +\infty$ $f(x) \to -\infty$ absurde

on a bien $L' = 0$.

4) Mq $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$

on pose $g(x) = f(x)e^{x\sqrt{a}}$ on veut montrer $\forall x \geqslant 0$ $g(0) \geqslant g(x)$

$$g'(x) = f'(x)e^{x\sqrt{a}} + \sqrt{a}f(x)e^{x\sqrt{a}}$$
$$= \left(f'(x)e^{-x\sqrt{a}} + \sqrt{a}f(x)e^{-x\sqrt{a}}\right)e^{2x\sqrt{a}}$$

si on note $h(x) = f'(x)e^{-x\sqrt{a}} + \sqrt{a}\,f(x)e^{-x\sqrt{a}}$

$$h'(x) = f''(x)e^{-x\sqrt{a}} - \sqrt{a}f'(x)e^{-x\sqrt{a}} + \sqrt{a}\left(f'(x)e^{-x\sqrt{a}} - \sqrt{a}f(x)e^{-x\sqrt{a}}\right)$$
$$= f''(x)e^{-x\sqrt{a}} - af(x)e^{-x\sqrt{a}}$$
$$= \left(f''(x) - af(x)\right)e^{-x\sqrt{a}} \geqslant 0.$$

~~donc $g'(x) = h(x)e^{2x\sqrt{a}}$~~

et donc $h(x)$ croissante. De plus $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ donc $h(x) \leq 0$ comme $g'(x) = h(x)e^{2x\sqrt{a}}$ alors $g'(x) \leq 0$ et g décroissante d'où $g(0) \geqslant g(x)$ cqfd.

<u>EX 10</u> On considère la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1+x}$ ~~pour~~ sur $\mathbb{R}_+^*$

$f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où f convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

On applique le corollaire du cours : $\alpha_i \geqslant 0$ $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ et φ convexe sur int ouvert I alors $\forall x_1, \dots, x_n \in I$ $\varphi\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(x_i)$

à $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$, $\alpha_3 = c$, $\alpha_4 = d$, $x_1 = \frac{b}{a}$, $x_2 = \frac{c}{b}$, $x_3 = \frac{d}{c}$, $x_4 = \frac{a}{d}$

Alors $\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + b + c + d + a} \leq \frac{a}{1 + \frac{b}{a}} + \dots + \frac{d}{1 + \frac{a}{d}} = \frac{a^2}{a+b} + \dots + \frac{d^2}{d+a}$ ∎

KØBENHAVNS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF COPENHAGEN

WWW.KU.DK

EX 11 ABC triangle dans le plan d'angles a, b, c

1) on utilise corollaire Jensen pour fonction $x \mapsto \sin x$ sur $[0,\pi]$ cette fct est concave donc

$$\sin\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}\right) \geq \frac{1}{3}\sin a + \frac{1}{3}\sin b + \frac{1}{3}\sin c$$

et donc $$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \geq \frac{1}{3}(\sin a + \sin b + \sin c)$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \geq \sin a + \sin b + \sin c.$$

2) cos n'est ni concave ni convexe sur $[0,\pi]$.

Par symétrie on peut supposer $a \geq b \geq c$

- si $a \leq \frac{\pi}{2}$ cos concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

et donc $$\cos a + \cos b + \cos c \leq 3\cos\frac{a+b+c}{3} = 3\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$$

- si $a > \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} > b \geq c$ puisque cos concave sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a

$$\cos b + \cos c \leq 2\cos\frac{b+c}{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2}\right) = 2\sin\frac{a}{2}$$

d'où $$\cos a + \cos b + \cos c \leq \cos a + 2\sin\frac{a}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} + 2\sin\frac{a}{2} = -2\left(\sin\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$$