L3 : Mathématiques et Economie **20 octobre 2021**
2021–2022

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.
Vos réponses doivent être justifiées.

Donner les définitions : *(cf. cours)*

1. de deux distances équivalentes,
2. de l'intérieur et de l'adhérence d'un sous-ensemble d'un espace topologique,
3. d'une tribu,
4. d'une fonction mesurable.

Donner les formulations : *(cf. cours)*

1. du théorème de Heine,
2. du théorème décrivant les compacts de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 1 Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel réel normé de dimension ≥ 1. Soit $M \subset E$. Démontrer ou réfuter (en proposant des contre-exemples) les assertions suivantes :

1. Si M est constitué d'un seul point alors M est fermé.
   VRAI. Soit $x \in E$ et $M = \{x\}$. Si $(x_n)_n \subset M$ est une suite convergente, alors la suite est constante (égale à x) et sa limite est nécessairement $x \in M$. L'ensemble M est donc fermé dans E.
2. Si M est fini alors M est fermé dans E.
   VRAI. Si M est fini, alors M est la réunion finie de singletons. Comme chaque singleton est un fermé de E d'après la question précédente, il en va de même de leur réunion finie, et donc M est fermé dans E.
3. Si M est dénombrable alors M est fermé.
   FAUX. Si $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$, l'ensemble $M = \mathbb{Q}$ est dénombrable mais $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \neq \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$ car différent de son adhérence.
4. Si M n'est pas fermé alors M est ouvert.
   FAUX. Soit $(E, \|\cdot\|) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Alors l'intervalle $[0, 1[$ n'est ni fermé, ni ouvert dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9x^2 + 4y^2 \leq 1\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

1. Montrer que A est une partie compacte de $\mathbb{R}^2$.
   On peut écrire $A = g^{-1}([0,1])$ où $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est défini par $g(x,y) = 9x^2 + 4y^2$. Comme g est continue sur $\mathbb{R}^2$ et $[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors $g^{-1}([0,1])$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. De plus, on a :

$$(x,y) \in A \iff 9x^2 + 4y^2 \leq 1 \Longrightarrow 9x^2 \leq 1 \text{ et } 4y^2 \leq 1 \Longrightarrow |x| \leq \frac{1}{3} \text{ et } |y| \leq \frac{1}{2},$$

   donc A est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, A est un compact comme fermé borné de l'espace vectoriel normé de dimension fini $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\exists (x_0, y_0) \in A$, $f(x_0, y_0) = \inf\limits_{(x,y)\in A} f(x,y)$.
   On remarque que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $1 + x^2 + y^2 \neq 0$. Ainsi, f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et en particulier sur le compact A où elle atteint donc ses bornes. En particulier, son infimum est atteint en un point $(x_0, y_0) \in A$, ce qui prouve le résultat.

Exercice 3 Soient (E, d_1), (F, d_2) et (G, d_3) trois espaces métriques. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Montrer que pour tout $C \subset G$, on a $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.
   Soit $C \subset G$, alors on a

$$x \in (g \circ f)^{-1}(C) \iff (g \circ f)(x) \in C \iff f(x) \in g^{-1}(C) \iff x \in f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right).$$

2. En déduire que si f et g sont continues, alors $g \circ f$ est continue.
   On suppose que f et g sont continues. g est continue, donc pour tout ouvert $O \subset G$, $g^{-1}(O)$ est un ouvert de F. De plus, f est continue et donc $f^{-1}(g^{-1}(O))$ est un ouvert de E car $g^{-1}(O)$ est un ouvert de F. Ainsi, on a montré que pour tout ouvert O de G, $f^{-1}(g^{-1}(O)) = (g \circ f)^{-1}(O)$ est un ouvert de E, ce qui veut dire que $g \circ f$ est continue.

Exercice 4 Soit $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ et soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ où $\mathcal{E} = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$.

1. On se propose de trouver la tribu $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{E}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}')$ où $\mathcal{E}' = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.
   Soient $\mathcal{E} = \{\{1,2,3\}, \{1,2,4\}\}$ et $\mathcal{E}' = \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}')$.
   Montrons tout d'abord que $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}')$. C'est tout à fait clair car
   - $\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} \in \mathcal{T}(\mathcal{E}')$;
   - $\{1,2,4\} = \{1,2\} \cup \{4\} \in \mathcal{T}(\mathcal{E}')$.

   On en déduit donc que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}')$.
   Montrons maintenant que $\mathcal{E}' \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$. En effet :
   - $\{1,2\} = \{1,2,3\} \cap \{1,2,4\} \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ *car une tribu est stable par intersection ;*
   - $\{3\} = \{1,2,3\} \cap \{1,2\}^c \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$;
   - $\{4\} = \{1,2,4\} \cap \{1,2\}^c \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$;
   - $\{5\} = \Omega \backslash \{\{1,2,3\} \cup \{1,2,4\}\} \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

On en déduit donc que $\mathcal{T}(\mathcal{E}') \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$, *et ainsi* $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}')$.

(b) Conclure.

Pour déterminer $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, *on cherche donc à déterminer* $\mathcal{T}(\mathcal{E}')$ *qui est donc*

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}') = \mathcal{P}(\{1,2\},\{3\},\{4\},\{5\})$$

comme vu en TD en utilisant une partition dénombrable $\mathcal{E}'$ *comme générateur.*

2. Trouver le clan $\mathcal{C}(\mathcal{E})$ et la classe monotone $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ engendrés par $\mathcal{E}$.

   Comme Ω *est fini, il est clair que* $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

   Concernant la classe monotone, elle doit contenir au minimum :
   - $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ *et* $\emptyset$,
   - *les ensembles* $\{1,2,3\}$ *et* $\{1,2,4\}$,
   - *les complémentaires d'ensembles inclus l'un dans l'autre* $\Omega\backslash\{1,2,3\} = \{4,5\}$ *et* $\Omega\backslash\{1,2,4\} = \{3,5\}$,
   - *les unions finies croissantes qui sont en fait déjà présents (uniquement* Ω*).*

   On en déduit donc que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{4,5\}, \{3,5\}\}$.