L3 : Mathématiques et Economie **1$^{\text{er}}$ décembre 2021**
2021–2022

CC1 : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 1 heure 30 minutes

Correction

Donner les définitions : *(Cf. Cours Magistral)*

1. d'une fonction étagée,
2. d'une fonction μ-intégrable et de son intégrale,
3. d'une fonction convexe.

Donner les formulations : *(Cf. Cours Magistral)*

1. du théorème de convergence dominée de Lebesgue,
2. du théorème sur la relation entre l'intégrale de Riemann et l'intégrale de Lebesgue,
3. du théorème de continuité avec condition de domination.

Exercice 1 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Démontrer ou réfuter (en proposant des contre-exemples) les assertions suivantes :

1. Si $x \in \Omega$ est tel que $\{x\} \in \mathcal{T}$ alors $\mu(\{x\}) = 0$.
   FAUX. Si $\mu = \delta_x$ où $x \in \Omega$ et $\{x\} \in \mathcal{T}$, alors $\mu(\{x\}) = \delta_x(\{x\}) = 1 \neq 0$.
2. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ est une suite croissante et $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ alors on a
$$\int_\Omega 1_A d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$
   VRAI. On a, pour toute suite croissante $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$, d'après la propriété de croissance vue en cours,
$$\int_\Omega 1_A d\mu = \mu(A) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$
3. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est une fonction mesurable satisfaisant $\int_\Omega f d\mu = 0$ alors $f = 0$.
   FAUX. Soit $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\mu = \lambda$ la mesure de Lebesgue, alors, pour la fonction $f = 1_{\{x\}} \neq 0$ où $x \in \mathbb{R}$, on obtient
$$\int_\Omega 1_{\{x\}} d\lambda = \lambda(\{x\}) = 0.$$

4. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est une fonction μ-intégrable alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mu\left(\{x \in \Omega : f(x) \geq \varepsilon\}\right) < +\infty.$$

VRAI. D'après l'inégalité de Markov, on obtient, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mu\left(\{x \in \Omega : f(x) \geq \varepsilon\}\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega f d\mu < \infty$$

car f est μ-intégrable.
DEUXIEME JUSTIFICATION. Soit $A = \{x \in \Omega : f(x) \geq \varepsilon\}$. Si, par contraposée, $\mu(A) = +\infty$ alors $\int_\Omega f d\mu \geq \int_A f d\mu \geq \int_A \varepsilon d\mu = +\infty \cdot \varepsilon = +\infty$. Absurde.

Exercice 2 Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy$ où $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$ et $D = [-1,1] \times [1,2]$.
On remarque que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{x^2}{y} 1_D(x,y)$ est mesurable comme produit d'une fonction continue f (car $y \neq 0$ sur $[1,2]$) et de 1_D qui est mesurable puisque D est un borélien de $\mathbb{R}^2$. De plus, $\forall (x,y) \in D$, $\frac{x^2}{y} \geq 0$ et la mesure de Lebesgue est σ-finie. On peut donc appliquer le Théorème de Fubini-Tonelli et on a

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_1^2 \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2}{y} dx\right) dy = \left(\int_1^2 \frac{dy}{y}\right)\left(\int_{-1}^1 x^2 dx\right).$$

Comme on a

$$\int_1^2 \frac{dy}{y} = [\ln(y)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$$
$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3},$$

on obtient donc $\displaystyle\iint_D f(x,y)dxdy = \frac{2\ln(2)}{3}$.

Exercice 3 Soit μ une mesure **non-nulle** sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ qui soit invariante par translation, c'est-à-dire satisfaisant $\mu(p + A) = \mu(A)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$ et tout $A \subset \mathbb{Z}$.

1. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.
   Par l'absurde, on suppose que $\mu(\{n\}) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors on a, par σ-additivité de μ,
   $$\mu(\mathbb{Z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = 0.$$
   Comme μ est non-nulle, c'est impossible. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $\mu(\{n_0\}) > 0$.

2. Montrer que $\mu(\{n\}) = \mu(\{n_0\})$ pour tous $n \in \mathbb{Z}$,.
   Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $p = n - n_0$. Comme μ est invariante par translation, on a
   $$\mu(\{n_0\}) = \mu(\{n_0\} + p) = \mu(\{n\}).$$

3. En déduire que la mesure μ est infinie.
   On sait que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\mu(\{n\}) = \mu(\{n_0\}) > 0$, *donc*
$$\mu(\mathbb{Z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n\}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mu(\{n_0\}) = +\infty.$$
   La mesure μ *est donc nécessairement infinie.*
4. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ où $\mathbb{Z}$ est muni de la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$ et $\mathbb{R}$ de celle des boréliens.
   (a) Est-ce que la fonction f toujours mesurable ?
   OUI. Comme on a muni $\mathbb{Z}$ *de la tribu* $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, *il est clair que* f *est toujours mesurable car, ayant muni* $\mathbb{R}$ *de n'importe quelle tribu* $\mathcal{T}$, *on a pour tout* $B \in \mathcal{T}$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\mathbb{Z})$.
   (b) Est-ce que la fonction f toujours intégrable ?
   NON. La fonction $f = 1_{\mathbb{Z}}$ *vérifie* $\int_{\mathbb{Z}} f d\mu = \mu(\mathbb{Z}) = +\infty$ *avec* μ *définie comme dans l'exercice, et n'est donc pas intégrable.*

Exercice 4 Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré probabilisé (c.à.d. $\mu(\Omega) = 1$) et $f : \Omega \to [0, +\infty[$ une fonction borélienne. On pose $A_- = \{x \in \Omega : f(x) < 1\}$, $A_0 = \{x \in \Omega : f(x) = 1\}$ et $A_+ = \{x \in \Omega : f(x) > 1\}$. Soit g définie par
$$\begin{aligned} g : \Omega &\to [0, +\infty] \\ x &\mapsto \lim_{n\to+\infty} f(x)^n. \end{aligned}$$

1. Montrer que A_-, A_0 et A_+ sont mesurables et $\Omega = A_- \sqcup A_0 \sqcup A_+$.
   On remarque que $A_- = f^{-1}([0, 1[)$, $A_0 = f^{-1}(\{1\})$ *et* $A_+ = f^{-1}(]1, +\infty[)$. *Comme* f *est borélienne et que* $[0, 1[$, $\{1\}$ *et* $]1, +\infty[$ *sont des boréliens de* $^\circ$, *on en déduit que* A_-, A_0 *et* A_+ *sont mesurables. De plus, il est clair que ces ensembles sont disjoints et que* $x \in \Omega$ *si et seulement si* x *appartient à un de ces ensembles, donc* $\Omega = A_- \sqcup A_0 \sqcup A_+$.
2. Montrer que g est mesurable.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on sait que la fonction* f_n *définie pour tout* $x \in \Omega$ *par* $f_n(x) := f(x)^n$ *est mesurable comme composée de* f *borélienne et* $t \mapsto t^n$ *mesurable de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $\mathbb{R}_+$. *On en déduit que* $g = \lim_{n\to+\infty} f_n$ *est mesurable comme limite de fonctions mesurables.*
3. Montrer que $\int\limits_{A_+} g d\mu = +\infty$ si $\mu(A_+) > 0$.
   On raisonne par contraposée et on suppose que $\int_{A_+} g d\mu < +\infty$, *c'est-à-dire que* $g 1_{A_+}$ *est intégrable. Soit* $x \in A_+$, *alors* $f(x) > 1$ *et donc* $\lim_{n\to+\infty} f(x)^n = g(x) = +\infty$. *On a donc*
$$A_+ \subset \{x \in \Omega : g(x) 1_{A_+}(x) = +\infty\}.$$
   On en déduit que $\mu(A_+) \le \mu\left(\{x \in \Omega : g(x)1_{A_+}(x) = +\infty\}\right)$. *Or, on sait que l'intégrabilité de* $g1_{A_+}$ *implique que* $\mu\left(\{x \in \Omega : g(x)1_{A_+}(x) = +\infty\}\right) = 0$. *On a donc* $\mu(A_+) \le 0$ *et donc* $\mu(A_+) = 0$.
   DEUXIEME JUSTIFICATION. En effet, $g(x) = +\infty$ *pour tout* $x \in A_+$. *Donc,* $\int_{A^+} g d\mu = +\infty \cdot \mu(A^+)$. *D'où,* $\int_{A^+} g d\mu = +\infty$ *si* $\cdot \mu(A^+) > 0$.

4. Montrer que $\int\limits_{A_-} g d\mu = 0$.

On définit la suite de fonction $(f_n^-)_n$ par $f_n^-(x) := f(x)^n 1_{A_-}(x)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n^- est mesurable comme produit de fonctions mesurable. On remarque que si $x \in A_-$ alors $f(x) < 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f(x)^n = 0$ et donc

$$\forall x \in \Omega, \quad \lim_{n\to+\infty} f_n^-(x) = 0.$$

De plus, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Omega, \quad |f_n^-(x)| \leq 1_{A_-}(x)$$

car $f(x) \leq 1$ pour tout $x \in A_-$. La fonction 1_{A_-} étant intégrable d'intégrale $\int_\Omega 1_{A_-} d\mu = \mu(A_-) \leq 1$ (c'est une mesure de probabilité), on peut appliquer le Théorème de Convergence Dominée de Lebesgue et on obtient :

$$\int_{A_-} g d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n^- d\mu = \int 0 d\mu = 0.$$

5. En déduire que si $\int\limits_\Omega g d\mu < +\infty$ alors $\int\limits_\Omega g d\mu = \mu(A_0)$.

Si $\int\limits_\Omega g d\mu < +\infty$, alors nécessairement $\int_{A_+} g d\mu < +\infty$ et ainsi $\mu(A_+) = 0$ d'après la question 3., ce qui implique que $\int_{A_+} g d\mu = 0$. Comme $\int_{A_-} g d\mu = 0$ d'après la question 4., on en déduit que

$$\int_\Omega g d\mu = \int_{A_0} g d\mu.$$

Si $x \in A_0$, alors $f(x) = 1$ par définition et donc $\lim_{n\to+\infty} f(x)^n = 1 = g(x)$. On a alors

$$\int_\Omega g d\mu = \int_{A_0} g d\mu = \int_{A_0} d\mu = \mu(A_0).$$