Correction du CC 1

Questions du cours: cf. cours

Exercice 1 1. $x \in (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \Longrightarrow$
$x \in A_1$ ou $x \in A_2$ mais $x \notin B_1 \cup B_2$
Donc, $x \in A_1 \setminus B_1$ ou $x \in A_2 \setminus B_2$. $\boxtimes$

2. Non. Si, par exemple, $x \in A_1 \setminus B_1$ et $x \in B_2$ alors $x \notin (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$ mais $x \in (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$.

Exemple concret: $A_1 = \{1\}$, $B_1 = \emptyset$, $B_2 = \{1\}$, A_2 quelconque. Dans ce cas $1 \notin (A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$ et $1 \in (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$. $\boxtimes$

Exercice 2 1. $\Rightarrow$) Supposons par l'absurd que $X = \bigsqcup_{i=1}^{n} F_i$ où $n \geq 2$, $F_i = \overline{F_i} \neq \emptyset$ pour $\forall i$. Alors $X = Z_1 \sqcup Z_2$ où $Z_1 = F_1$ et $Z_2 = \bigcup_{i \geq 2} F_i$. Notons que Z_2 est fermé (comme union finie de fermés). Mais $Z_1 = Z_2^c$ et $Z_2 = Z_1^c$. Donc, Z_1 et Z_2 sont des ouverts. Absurd.

$\Leftarrow$) Si X n'est pas connexe alors $X = U_1 \sqcup U_2$ où $U_i = \mathring{U}_i \neq \emptyset$. Mais $U_1 = U_2^c$, $U_2 = U_1^c$ sont des fermés. $\boxtimes$

2. Soit $y \in Y$. Montrons que $\{y\}$ est fermé. Notons par $d(\cdot,\cdot)$ la distance sur Y. Alors $Y - \{y\} = \bigcup_{z \in Y - \{y\}} B\left(z, \frac{d(y,z)}{2}\right)$.
(Rappelons que $B(z, r)$ est la boule __ouverte__ de centre z et de rayon r.) Donc,
$Y - \{y\}$ est ouvert $\Longleftrightarrow$ $\{y\}$ est fermé.

Soit $Im(f) = \{y_1, \dots, y_m\}$, $m \geq 1$, $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$. Alors $X = \bigsqcup_i f^{-1}(y_i)$. Mais X est connexe. Par la partie 1 de l'exo $m = 1$, i.e. f est constant.

__Exercice 3__ 1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Alors

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin A \\ X & \text{si } 0 \in A. \end{cases}$$

Donc, $f^{-1}(\mathcal{T}) = \{\emptyset, X\}$.

2.(a) (i) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{C}$

(ii) $A \in f(\mathcal{E}) \Longleftrightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(A)^c \in \mathcal{E}$ (car $\mathcal{E}$ est une tribu). Mais $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$
Donc, $A^c \in f(\mathcal{E})$.

(iii) Soit $A_i \in f(\mathcal{E})$, $i \in \mathbb{N}$. Donc, $f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$, $\forall i \Longrightarrow \bigcup_i f^{-1}(A_i) \in \mathcal{E}$ (car $\mathcal{E}$ est une tribu). Mais $\bigcup_i f^{-1}(A_i) = f^{-1}(\bigcup_i A_i)$. Donc, $\bigcup_i A_i \in f(\mathcal{E})$.

Nous avons démontré que $f(\mathcal{E})$ est une tribu.

(b) Soit $A \in \mathcal{P}(Y)$. Alors

$$f^{-1}(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a \notin A \\ \mathbb{R} & \text{si } a \in A \end{cases}$$

D'où, $f(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(Y)$. $\boxtimes$

<u>Exercice 4</u> Si $A_1, A_2 \in C \Longrightarrow A_1^c, A_2^c \in C \Longrightarrow$ $A_1^c \cup A_2^c = (A_1 \cap A_2)^c \in C \Longrightarrow A_1 \cap A_2 = ((A_1 \cap A_2)^c)^c \in C$.

Nous avons démontré que C est fermé pour l'intersection. (Vu en TD!).

Par le théorème de classes monotones $\mathcal{M}(C)$ est une tribu. Donc, $\mathcal{M}(C) \supset \mathcal{T}(C)$.

Mais chaque tribu est une classe monotone. Donc, $\mathcal{T}(C) \supset \mathcal{M}(C)$ c.à.d. $\mathcal{M}(C) = \mathcal{T}(C)$.

$\boxtimes$