L3 : Mathématiques et Economie **5 janvier 2022**
2021–2022

EXAMEN : Topologie et théorie de la mesure

CORRECTION

Donner les définitions : *Cf. Cours Magistral*

1. d'un majorant essentiel,
2. d'un espace de Banach,
3. d'une base hilbertienne.

Donner les formulations : *Cf. Cours Magistral*

1. de l'inégalité de Minkowski,
2. de l'inégalité de Hölder,
3. du théorème de Riesz-Fischer.

Exercice 1 On considère la fonction polynomiale

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1.$$

1. Est-ce que f est une fonction (a) convexe, (b) strictement convexe ou (c) ni convexe ni strictement convexe ?
   On calcule les dérivées secondes de f :
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 4 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2.$$
   La matrice Hessienne de f en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est donc
   $$Hessf(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Utilisons le critère de Sylvester pour montrer que $Hessf(x, y)$ est définie positive en montrant que ses mineurs principaux sont strictement positifs. En effet, on a $2 > 0$ et $\det(Hessf(x, y)) = 2 \times 4 - (-2)^2 = 4 > 0$. La matrice hessienne est donc définie positive en tout point de $\mathbb{R}^2$, et ainsi f est strictement convexe sur $\mathbb{R}^2$. La bonne réponse est (b).
2. Soit $D_1 = [0, 2]^2$ et $g_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ la restriction de f sur D_1, c.à.d. $g_1(x, y) = f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in D_1$.
   (a) Montrer que g_1 admet un minimum.
   L'ensemble D_1 est compact comme fermé borné de $\mathbb{R}^2$, et g_1 est continue comme restriction d'une fonction polynomiale sur D_1. On en déduit que g_1 atteint ses bornes et que donc son minimum est atteint.

(b) Déterminer le minimum de g_1 ainsi que le ou les point(s) $(x, y) \in D_1$ pour le(s)quel(s) ce minimum est atteint.

On calcule le gradient de g_1 en tout point $(x, y) \in D_1$ et on trouve

$$\nabla g_1(x, y) = (2x - 2y, 4y - 2x - 2).$$

Ainsi, $\nabla g_1(x, y) = 0 \iff 2x-2y = 4y-2x-2 = 0 \iff x = y$ et $2y-x-1 = 0$. On trouve ainsi que $2x - x - 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 1 = y$. Le point $(1, 1)$ appartient à D_1, il s'agit donc du minimum global de g_1 car g_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ et convexe. La valeur minimal de g_1 est donc $\min_{(x,y)\in D_1} g_1(x, y) = g_1(1, 1) = 0$.

3. Soit $D_2 = [2, 3] \times [0, 1]$ et g_2 la restriction de f sur D_2. Trouver les points (s'ils existent) où g_2 atteint son minimum.

Comme le gradient de f ne s'annule qu'au point $(1, 1) \notin D_2$, le minimum de g_2, qui est atteint car g_2 est continue sur le compact D_2, est à chercher sur le bord de D_2. On étudie donc :

$$\forall y \in [0, 1], g_2(2, y) = 2y^2 - 6y + 5, \quad \frac{\partial g_2(2, y)}{\partial y} = 4y - 6 \geq 0 \iff y \geq \frac{3}{2}$$

$$\forall y \in [0, 1], g_2(3, y) = 2y^2 - 8y + 10, \quad \frac{\partial g_2(3, y)}{\partial y} = 4y - 8 \geq 0 \iff y \geq 2$$

$$\forall x \in [2, 3], g_2(x, 0) = x^2 + 1, \quad \frac{\partial g_2(x, 0)}{\partial x} = 2x \geq \iff x \geq 0$$

$$\forall x \in [2, 3], g_2(x, 1) = x^2 - 2x + 1, \quad \frac{\partial g_2(x, 1)}{\partial x} = 2x - 2 \geq 0 \iff x \geq 1.$$

On en déduit que

- *$y \mapsto g_2(2, y)$ est décroissante sur $[0, 1]$ et son minimum est donc atteint pour $y = 1$ et vaut $g(2, 1) = 1$.*
- *$y \mapsto g_2(3, y)$ est décroissante sur $[0, 1]$ et son minimum est donc atteint pour $y = 1$ et vaut $g(3, 1) = 4$.*
- *$y \mapsto g_2(x, 0)$ est croissante sur $[2, 3]$ et son minimum est donc atteint pour $x = 2$ et vaut $g(2, 0) = 5$.*
- *$y \mapsto g_2(x, 1)$ est croissante sur $[2, 3]$ et son minimum est donc atteint pour $x = 2$ et vaut $g(2, 1) = 1$.*

Ainsi, le minimum de g_2 est atteint au point $(2, 1)$.

<u>Deuxième preuve de 3.</u> Rappelons que si a et $b \in \mathbb{R}^2$ alors $[a, b] = \{(1 - \lambda)a + \lambda b : \lambda \in [0, 1]\}$ est le segment avec point initial a et point terminal b. Notons $m = (1, 1)$, $p_1 = (2, 0)$ et $p_2 = (2, 1)$. Si $p \in D_2$ notons par m_p le point sur $[p, m] \cap D_2$ le plus proche de m. Alors $m_p \in [p_1, p_2]$. (Faire un dessin.) Mais la restriction de f sur $[p, m]$ décroit strictement car f est strictement convexe et m est le point de minimum de f. D'où m_p est le point de minimum de la restriction de g_2 sur $[p, m_p]$. Donc, le minimum global de g_2 est atteint sur le segment $[p_1, p_2]$. Finalement, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, y) = 4y-6$ et, donc, $(2, \frac{3}{2})$ est le point critique de la restriction de f sur la droite $x = 2$. Ainsi, la restriction de g_2 sur $[p_1, p_2]$ est décroissante et, par conséquant, le minimum de g_2 est atteint au point $p_2 = (2, 1)$.

<u>Troisième preuve (la plus simple) de 3.</u> Notons que $f(x, y) = (x - y)^2 + (y - 1)^2$. Soit $(x, y) \in D_2$. On voit que $(x - y)^2 \geq 1$ et $(y - 1)^2 \geq 0$. Donc, si $(x - y)^2 = 1$ et

$(y-1)^2 = 0$ alors (x,y) est un point de minimum pour g_2. Mais $(x,y) = (2,1)$ est la seule solution (dans D_2) du système $(y-1)^2 = 0$, $(x-y)^2 = 1$. D'où $(2,1)$ est l'unique point de minimum de g_2.

Exercice 2 Dans cet exercice $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ sont munis de leurs tribus boréliennes et μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \cos(xt)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est :
   (a) borélienne, et
   Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc mesurable (borélienne).
   (b) μ-intégrable.
   Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $|f(x,t)| = |\cos(xt)| \leq 1_{\mathbb{R}_+}(t)$ et la fonction $1_{\mathbb{R}_+}$ est μ-intégrable car $\int 1_{\mathbb{R}_+} d\mu = \mu(\mathbb{R}_+) = 1$. On en déduit que $t \mapsto f(x,t)$ est μ-intégrable.

   On pose alors pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t)d\mu(t)$.

2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
   On utilise le théorème de continuité avec hypothèse de domination. En effet,
   1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}_+$;*
   2. *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue ;*
   3. *Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, on a $|f(x,t)| = |\cos(xt)| \leq 1_{\mathbb{R}_+}(t)$ et la fonction $1_{\mathbb{R}_+}$ est μ-intégrable car $\int 1_{\mathbb{R}_+} d\mu = \mu(\mathbb{R}_+) = 1$.*

   On en déduit donc que la fonction F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. On suppose que la fonction $t \mapsto t^2$ est μ-intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-F(x)}{x^2}$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t)$.

   <u>Indications :</u> *On sait bien, et on pourra utiliser sans preuve, que $1 - \cos(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$ et $\displaystyle\lim_{u\to 0^+} \frac{1-\cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$. Se rappeler aussi du théorème de convergence dominée.*
   On cherche à calculer, comme $1 = \int_{\mathbb{R}_+} d\mu(t)$, par linéarité :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-F(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)d\mu(t)}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right) d\mu(t).$$

   On utilise le Théorème de Convergence Dominé de Lebesgue car, pour tout $t > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(xt)}{x^2} = t^2 \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(xt)}{(xt)^2} = \frac{t^2}{2},$$

et on a aussi
$$\left|\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right| = \frac{1-\cos(xt)}{x^2} \leq \frac{(xt)^2}{2x^2} = \frac{t^2}{2}$$
où $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ est intégrable par hypothèse. On en déduit que
$$\lim_{x\to 0^+} \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right) d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos(xt)}{x^2}\right) d\mu(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^2}{2} d\mu(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t).$$
Ainsi, on a $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1-F(x)}{x^2} = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t).$

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

1. Est-ce que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ si
   (a) $\mu(\Omega) < +\infty$?
   Oui, c'est en effet le cas car quand $\mu(\Omega) < +\infty$, $L^q(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \subset L^p(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ dès que $1 \leq p < q \leq +\infty$. En appliquant ce résultat au cas $p = 1$ et $q = 2$, on obtient donc que $f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu) \Rightarrow f \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.
   <u>Preuve directe de 1(a).</u> Soit $A = \{x \in \Omega : |f(x)| > 1\}$. Alors $|f(x)| < |f(x)|^2$ pour tout $x \in A$. Donc, $\int_A |f|d\mu \leq \int_A |f|^2 d\mu \leq \int_\Omega |f|^2 d\mu < \infty$. Mais $|f(x)| \leq 1$ pour tout $x \in A^c$ et $\mu(\Omega) < \infty$. D'où, $\int_{A^c} |f|d\mu \leq \mu(A^c) < \infty$. Par conséquant, $\int_\Omega |f|d\mu = \int_A |f|d\mu + \int_{A^c} |f|d\mu < \infty$.
   (b) $\mu(\Omega) = +\infty$?
   Non, ce n'est pas toujours le cas. Par exemple si $\Omega = [1, +\infty[$, $\mathcal{T} = \mathcal{B}(\Omega)$ et $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ appartient bien à $L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ mais pas à $L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.
2. Supposons que $\mu(\Omega) = 1$.
   (a) Soit $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)$. Montrer que $g \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.
   Par le Théorème de Fubini-Tonelli, comme f est mesurable, g l'est aussi et on a
   $$\int_{\Omega\times\Omega} g^2(x,y)d(\mu\otimes\mu)(x,y) = \int_{\Omega\times\Omega} f^2(x)d(\mu\otimes\mu)(x,y) = \int_\Omega f^2(x)d\mu(x) < +\infty$$
   car $\int_\Omega d\mu(y) = \mu(\Omega) = 1$ et $f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$. On a donc bien $g \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.

   <u>Deuxième preuve de 2(a).</u> La fonction f^2 étant mesurable il existe une suite de fonctions étagées positives (h_n) telle que $h_n(x) \nearrow f^2(x)$ pour tout $x \in \Omega$. Soit $h'_n : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto h_n(x)$. Alors $h'_n(x, y) \nearrow g^2(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega \times \Omega$ et $\int_{\Omega\times\Omega} h'_n d(\mu \otimes \mu) = \int_\Omega h_n d\mu$ parce que $\mu(\Omega) = 1$. Par le théorème de convergence monotone
   $$\lim_n \int_{\Omega\times\Omega} h'_n d(\mu\otimes\mu) = \lim_n \int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega f^2 d\mu = \int_{\Omega\times\Omega} g^2 d(\mu\otimes\mu) < \infty.$$

(b) Montrer que la fonction définie par $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$, appartient à $L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.
L'espace $L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$ est un espace vectoriel, et comme $(x, y) \mapsto f(x)$ et $(x, y) \mapsto f(y)$ appartiennent à cet espace, on en déduit qu'il en est de même pour leur différence, c'est-à-dire que $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x) - f(y)$, appartient à $L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.

(c) Démontrer l'égalité suivante en précisant le théorème principal utilisé dans votre preuve :

$$\int\limits_{\Omega\times\Omega} [f(x) - f(y)]^2 \, d(\mu \otimes \mu)(x, y) = 2 \int_\Omega f^2 d\mu - 2 \left(\int_\Omega f d\mu \right)^2 .$$

Par la question 3(b), la fonction $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto (f(x) - f(y))^2$, est intégrable. En utilisant le Théorème de Fubini, l'intégrabilité de la fonction f (cf. question 1(a)) et comme $\mu(\Omega) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega\times\Omega} (f(x) - f(y))^2 \, d(\mu \otimes \mu)(x, y) \\
&= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega (f(x)^2 + f(y)^2 - 2f(x)f(y)) d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega f(x)^2 d\mu(x) + f(y)^2 - 2f(y) \int\limits_\Omega f(x) d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int\limits_\Omega f(x)^2 d\mu(x) + \int\limits_\Omega f(y)^2 d\mu(y) - 2 \int\limits_\Omega f(y) d\mu(y) \int\limits_\Omega f(x) d\mu(x) \\
&= 2 \int_\Omega f^2 d\mu - 2 \left(\int_\Omega f d\mu \right)^2 .
\end{aligned}$$

Deuxième preuve de 3(c). Les fonctions $(x, y) \mapsto |f(x)|$ et $(x, y) \mapsto |f(y)|$ sont mesurables. Donc, leur produit $(x, y) \mapsto |f(x)f(y)|$ est mesurable aussi. Par le théorème de Fubini-Tonelli et en utilisant que $\mu(\Omega) = 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega\times\Omega} |f(x) \cdot f(y)| d(\mu \otimes \mu)(x, y) = \int\limits_\Omega \left(\int\limits_\Omega |f(x) \cdot f(y)| d\mu(x) \right) d\mu(y) \\
&= \int_\Omega |f(x)| d\mu(x) \cdot \int_\Omega |f(y)| d\mu(y) < \infty.
\end{aligned}$$

D'où, la fonction $(x, y) \mapsto f(x) \cdot f(y)$ est intégrable et par le théorème de Fubini

$$\int\limits_{\Omega\times\Omega} f(x) \cdot f(y) d(\mu \otimes \mu)(x, y) = \int_\Omega f(x) d\mu(x) \cdot \int_\Omega f(y) d\mu(y) = \left(\int_\Omega f(x) d\mu(x) \right)^2 .$$

Par 2(a), les fonctions $(x,y) \mapsto f(x)^2$ et $(x,y) \mapsto f(y)^2$ sont intégrables aussi. En utilisant la linéarité de l'intégrale de Lebesgue (valable pour les fonctions intégrables), le théorème de Fubini et $\mu(\Omega) = 1$, on obtient

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega\times\Omega} (f(x) - f(y))^2 \, d(\mu \otimes \mu)(x,y) \\
&= \int\limits_{\Omega\times\Omega} f(x)^2 d(\mu \otimes \mu)(x,y) - 2 \int\limits_{\Omega\times\Omega} f(x) \cdot f(y) d(\mu \otimes \mu)(x,y) + \int\limits_{\Omega\times\Omega} f(y)^2 d(\mu \otimes \mu)(x,y) \\
&= 2 \int_\Omega f^2 d\mu - 2 \left(\int_\Omega f d\mu \right)^2 .
\end{aligned}
$$