Feuille 8

Exercice 1

On considère la restriction de $\|\cdot\|$ sur F. D'après le Thm 4.14 du cours les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Soit $v_i \in F$, $v_i \to v$, $v \in E$. Si $v \in F$, rien à démontrer. Soit $v \notin F$ et $e_1, \dots, e_n$ une base de $F + \mathbb{R}v$ telle que $F = \langle e_1, \dots, e_{n-1} \rangle$ et $v = e_n$. On sait que $\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n\|_\infty = \max_i |\alpha_i|$ est une norme sur $F + \mathbb{R}v$. Mais $\|\cdot\| \sim \|\cdot\|_\infty$. Donc, $\|v - v_i\|_\infty \to 0$. D'où, $v \in F$. Absurd.

$\boxtimes$

Exercice 2

On sait que $[0,1] \cap \mathbb{Q} := [0,1]_{\mathbb{Q}}$ est dense dans $[0,1]$ et dénombrable.

Donc, $[0,1]$ est séparable.

Soit $n > 1$. $[0,1]^n_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.

Soit $a = (a_1, .., a_n) \in [0,1]^n$ et $a_{ki} \xrightarrow[k]{} a_i$, où $a_{ki} \in \mathbb{Q}$. Alors

$a_k := (a_{k1}, .., a_{kn}) \xrightarrow[k]{} a$ (voir exo 1).

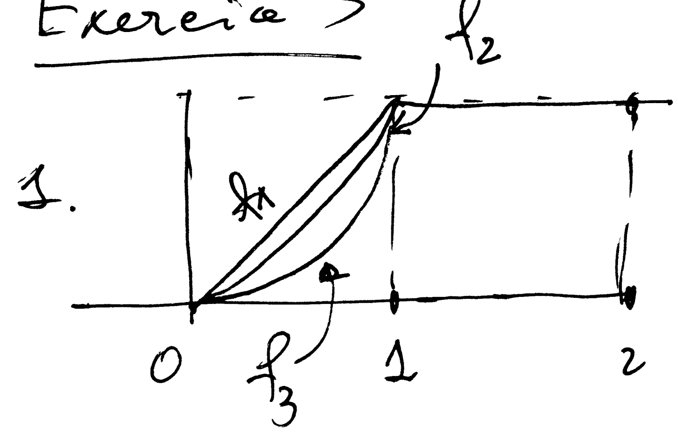
Donc, $[0,1]^n$ est <u>séparable</u>. $\boxtimes$

<u>Rq.</u> Si $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ des espaces <u>métrique</u> $\overline{A} = X$ et $\overline{B} = Y$ alors $\overline{A \times B} = X \times Y$. ($\|(v, w)\|_{X \times Y} := \max\{\|v\|_X, \|w\|_Y\}$.

<u>Preuve</u> Presque la même comme ci-dessus.

$\boxtimes$

Exercice 3



$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_0^2 |f_n(x) - f_m(x)|\, dx =$$

$$\overset{\text{si } n \le m}{=} \int_0^1 (x^n - x^m)\, dx =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} = \frac{m-n}{(n+1)(m+1)} \longrightarrow 0 \text{ si}$$

$\min\{n, m\} \to +\infty$.

$\Rightarrow \{f_n\}$ est Cauchy.

2. Supposons que $f_n \to g$ dans E.

- $\int_0^2 |f_n - g|\,dx = \int_0^1 |f_n - g|\,dx + \int_1^2 |1-g|\,dx \to 0.$

$\Longrightarrow \int_1^2 |1-g|\,dx = 0$. Mais $|1-g|$ est continue

$\Longrightarrow g(x) = 1$ si $1 \leq x \leq 2$.

- $\int_0^1 |f_n - g|\,dx = \int_0^1 |x^n - g|\,dx \underset{n}{\to} 0$ et

$|x^n - g| \geq |g| - x^n$

$\Longrightarrow \int_0^1 |x^n - g|\,dx \geq \int_0^1 |g|\,dx - \int_0^1 x^n\,dx =$

$= \int_0^1 |g|\,dx - \frac{1}{n+1} \underset{n}{\to} 0 \Longrightarrow \int_0^1 |g|\,dx \underset{n}{\to} 0$

$\Longrightarrow |g| = g = 0$ si $0 \leq x \leq 1$.

Donc, $g \notin E$. Absurd.

$\Longrightarrow E$ n'est pas complet. $\boxtimes$

Exercice 4

Soit $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$.

Pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$A_n = \left\{ x \in \Omega \,/\, |f(x)| > \|f\|_\infty + \frac{1}{n} \right\}.$$

Alors $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall n$.

Par la définition de $\|\cdot\|_\infty$ (Déf. 9.1 CM), $\mu(A_n) = 0$ pour $\forall n$.

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \quad \mu\text{-p.p.} \quad \boxtimes$$

<u>Remarque</u> (<u>plutôt conseil</u>) Comme <u>entraînement</u> essayer à résoudre <u>l'Exercice 9.18 du CM</u>.

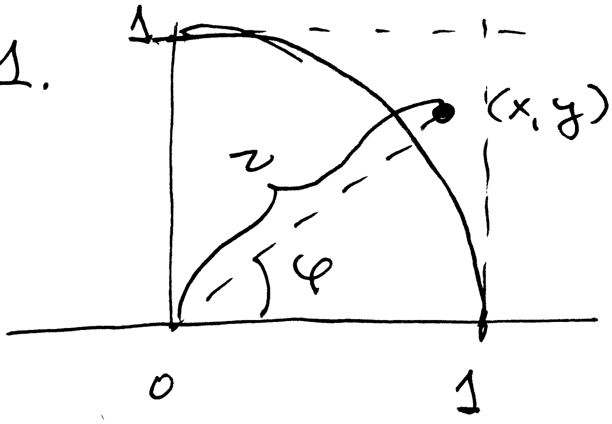
<u>Indication</u> : Pour la réciproque on peut considérer

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/n \\ 0, & \frac{1}{n} < x \leq 1 \end{cases}.$$

6

Exercice 5

1.



$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \left(\text{où } 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2} \text{ et } 0<r\le 1 \text{ si } x^2+y^2\le 1 \right)$$

$$|J(x,y)| = r$$

$$\int_{[0,1]^2} f\, d\lambda_2 = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 r f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, dr \right) d\varphi$$

(on utilise que $f=0$ si $x^2+y^2>1$)

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{r}{r^2}\, dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{dr}{r} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(\lim_{\varepsilon\to+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\lim_{\varepsilon\to+0} -\ln(\varepsilon) \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow f \notin L^1(]0,1[^2, \lambda^2).$$

2. $\sqrt{f(x,y)} = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)^{1/2} =$

$= \frac{1}{r}.$

$$\Rightarrow \int_{[0,1]^2} \sqrt{f}\, d\lambda_2 = \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^1 \frac{r}{r}\, dr \right) d\varphi = \frac{\pi}{2} = \|\sqrt{f}\|_1 < \infty.$$

$$\Rightarrow \sqrt{f} \in L^1(]0,1[^2, \lambda_2)$$

3. $\|\sqrt{f}\|_2 := \left(\int_{]0,1[^2} (\sqrt{f})^2 d\lambda_2 \right)^{1/2} = \infty$ (voir 1).

$$\Rightarrow \sqrt{f} \notin L^2(]0,1[^2, \lambda_2).$$

$\lambda_2(]0,1[^2) = 1 < \infty$ et
par <u>la proposition 9.6 du CM</u> on a que $L^2(]0,1[^2) \subsetneq L^1(]0,1[^2)$.

$\boxtimes$

Exercice 6

1. Rappel : $v = (v_n) \in \ell^p(\mathbb{N})$ ssi

- $\sum_n |v_n|^p := \|v\|_p^p < \infty$.

Donc, $u \in \ell^p(\mathbb{N}) \Leftrightarrow \sum_n \frac{1}{(n+1)^{\alpha p}} < \infty$

$\Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha p}} < \infty \Leftrightarrow \alpha p > 1 \Leftrightarrow \boxed{\alpha > \frac{1}{p}}$

- Soit $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$.

Alors $\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \in \ell^q(\mathbb{N})$ parce que $\alpha > \frac{1}{q}$

et $\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right) \notin \ell^p(\mathbb{N})$ parce que $\alpha \leq \frac{1}{p}$.

$\Rightarrow \ell^q(\mathbb{N}) \not\subset \ell^p(\mathbb{N})$.

Remarque : Si $\alpha = 1$ on obtient Exemple 30 du CM.

2. $|v_n| \leq 1 \Rightarrow |v_n|^q \leq |v_n|^p$

car $q > p$.

$$\Rightarrow \sum_n |v_n|^q = \|v\|_q^q \leq \sum_n |v_n|^p = \|v\|_p^p .$$

3. $B_p(0,1)$ (= la boule unité de $\ell^p(\mathbb{N})$)

$$= \{(v_n) \mid \sum_n |v_n|^p \leq 1\}$$

Donc, $|v_n| \leq 1$ pour $\forall n$

Par 2, $\sum_n |v_n|^q \leq 1$ c.à.d.

$B_p(0,1) \subset B_q(0,1)$.

4. • $v=(v_n)\in \ell^p(\mathbb{N}) \Leftrightarrow$

$\sum_n |v_n|^p < \infty \Rightarrow \exists\, n_0$ t.q. $|v_n|<1$

si $n>n_0 \Rightarrow |v_n|^q < 1$ si $n>n_0$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq n_0} |v_n|^q \leq \sum_{n\geq n_0} |v_n|^p < \infty$$

$$\Rightarrow \sum_n |v_n|^q < \infty \Rightarrow \underline{\underline{\ell^p(\mathbb{N}) \subset \ell^q(\mathbb{N})}}.$$

• Soit $v\in \ell^p(\mathbb{N})$. Alors

$$\left\|\frac{v}{\|v\|_p}\right\|_p = 1 \Rightarrow \frac{v}{\|v\|_p} \in B_p(0,1) \overset{\text{par } 3}{\subset} B_q(0,1).$$

$$\Rightarrow \left(\sum_n \left(\frac{|v_n|}{\|v\|_p}\right)^q\right)^{1/q} \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(\sum |v_n|^q\right)^{1/q}}{\|v\|_p} = \frac{\|v\|_q}{\|v\|_p} \leq 1 \Leftrightarrow \|v\|_q \leq \|v\|_p.$$

$\boxtimes$

<u>Rémarque</u>: L'inclusion $\ell^q(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$ est déjà vu (<u>j'espère</u>) dans le CM (c'est Prop. 9.8)

Exercice 7

1. Soit $f \in L^q(]0,1[)$. Soit aussi $A = \{x \in]0,1[\mid |f(x)| < 1\}$.

Alors $|f(x)|^p > |f(x)|^q$ si $x \in A$

et $|f(x)|^p \leq |f(x)|^q$ si $x \in A^c$

$$\Rightarrow \int_{A^c} |f|^p d\lambda \leq \int_{A^c} |f|^q d\lambda \leq \int_{]0,1]} |f|^q d\lambda < \infty$$

Mais, $$\int_A |f|^p d\lambda \leq \int_A 1 \, d\lambda = \lambda(A) \leq 1$$

$$\Rightarrow \int_{]0,1]} |f|^p d\lambda = \int_A |f|^p d\lambda + \int_{A^c} |f|^p d\mu < \infty \Leftrightarrow$$

$f \in L^p(]0,1])$

Remarque : Voir la Prop. 9.6 du CM pour le resultat général.

2. Calculons $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta}$ où $\beta > 0$.

- Si $\beta = 1$ alors $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} =$

$= \lim_{\varepsilon \to +0} (-\ln \varepsilon) = +\infty$

- Si $\beta > 1$ alors $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^\beta}$ pour $\forall\, 0 < x \leq 1$

$\Longrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = +\infty$

- Si $0 < \beta < 1$ alors $\int_0^1 \frac{dx}{x^\beta} = \frac{1}{1-\beta} \cdot x^{1-\beta} \Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{1-\beta} < +\infty$

D'où : $f \in L^p \Longleftrightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha \cdot p}} < \infty \Longleftrightarrow \alpha p < 1$

$\Longleftrightarrow \alpha < \frac{1}{p}$

⊛ Si $q > p$ et $\alpha < \frac{1}{q}$ alors $\alpha < \frac{1}{p}$. Donc, $\underline{L^q \subset L^p}$.

⊛ Si $1/q < \alpha < 1/p$ alors $f_\alpha \in L^p \setminus L^q$.

<u>Remarque</u> Voir <u>Prop. 9.6 du CM</u> pour le résultat général.

3. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g_\alpha^p \, d\lambda = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^{\alpha p}} =$

$$= \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha p}}$$

<u>Cas 1</u> Si $\alpha p = 1$ alors $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha p}} = \ln y \Big|_1^{\infty} = +\infty$

<u>Cas 2</u> Si $\alpha p < 1$ alors $\displaystyle\frac{1}{y^{\alpha p}} \geq \frac{1}{y} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha p}} = +\infty$

Cas 3 Si $1 < \alpha p$ et $\beta = \alpha p$ alors

$$\int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{\alpha p}} = \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{\beta}} = \frac{1}{1-\beta} \, y^{1-\beta} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{\beta - 1} < \infty$$

D'où, $g_\alpha \in L^p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \alpha p > 1 \Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{p}$.

4. Par 3, si $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$ alors

$g_\alpha \in L^q(\mathbb{R}) \setminus L^p(\mathbb{R})$.

Soit $\varphi_\alpha = \frac{1}{x^\alpha} \mathbb{1}_{]0,1]}$ et

soit $\frac{1}{q} < \alpha < \frac{1}{p}$.

Par 2, $\varphi_\alpha \in L^p(\mathbb{R}) \setminus L^q(\mathbb{R})$.

Par conséquent, la réponse est <u>NON</u>.

$\boxtimes$

Exercice 8

1. • Soit (a_n) une suite convergente c.a.d. $\exists\, a \in X$ t.q. $d(a, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $C > 0$ tel que $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ si $n > C$.

Soit n et $m > C$. Alors

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

$\Rightarrow (a_n)$ est une suite de Cauchy.

• Evidemment, (2^{-n}) est une suite de Cauchy qui converge vers 0

Mais $0 \notin X =]0, +\infty[$.

2. Soit $n_0 > 0$ tel que

$d(x_n, x_m) \leq 1$ si n et $m > n_0$.

Soit $C = \max_{1 \leq i \leq n_0} d(x_i, x_{n_0})$,

Alors $d(x_\ell, x_{n_0}) \leq \max\{1, C\}$

pour tout ℓ.

D'où $(x_n) \subset B(x_{n_0}, \max\{1, C\})$

et (x_n) est bornée.

$\boxtimes$

Exercice 9

1. Soit $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \in \mathbb{R}[x]$.

Soit $\mu > 0$. Il existe $p(x) = \alpha_0 x^n + \dots + \alpha_n \in \mathbb{Q}[x]$

tel que $|a_i - \alpha_i| < \mu$ pour $\forall i$.

Alors $|f(x) - p(x)| \leq \sum_{i=0}^{n} |a_i - \alpha_i| x^n \leq$

$\leq (n+1)\mu$ pour $\forall x \in [0, 1]$.

Si $\mu = \frac{\varepsilon}{n+1}$, $\|f - p\|_\infty \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \overline{\mathbb{Q}[x]} = E$.

2. Il faut montrer que $\mathbb{Q}[x]$ est dénombrable.

Mais $\mathbb{Q}[x] = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{Q}[x]_n$ où

$\mathbb{Q}[x]_n = \{f \in \mathbb{Q}[x] \mid \deg f \leq n\}$.

$\mathbb{Q}[x]_n$ est dénombrable (car $\mathbb{Q}^{n+1}$ l'est)

$\Rightarrow \mathbb{Q}[x]$ est dénombrable.

3. Soit $f(x) = e^x$, $x \in [0,1]$.

Par le thme de Weierstrasse, $\exists\, p_n(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.q. $\|f - p_n\|_\infty \to 0$. dans l'espace $C^0([0,1], \|\cdot\|_\infty)$.

Mais $f \notin \mathbb{R}[x]$. En effet, si $f \in \mathbb{R}[x]$ et $\deg f = n$ alors

$$\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}} = 0.$$ Mais $f' = f \neq 0$. Absurd.

Donc, $\mathbb{R}[x] \neq \overline{\mathbb{R}[x]}$.

4. $E = \mathbb{R}[x]$ n'est pas complet parce que (p_n) ci-dessus est une suite de Cauchy (par Ex. 8.1) qui ne converge pas dans E (par 3).

$\boxtimes$