

## Feuille d'exercices IV.

Correction partielle.

**Exercice 1.** (Mesure de Dirac) Soit  $x \in \Omega$ . Montrons que  $\delta_x$  est une mesure de probabilité sur  $\Omega$ . On a en effet :

- Pour tout  $A \subset \Omega$ ,  $\delta_x(A) \geq 0$ ;
- $\delta_x(\emptyset) = 0$  car  $x \notin \emptyset$ ;
- Soit  $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$  une suite d.d.d., alors

$$\delta_x \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bigsqcup_n A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme  $\bigsqcup_n A_n$  est l'union disjointe des  $A_n$ , on sait que

$$x \in \bigsqcup_n A_n \iff \exists ! k \in \mathbb{N}, x \in A_k.$$

Comme de plus  $\forall n \neq k, \delta_x(A_n) = 0$ , on a bien

$$\delta_x \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \delta_x(A_k) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_x(A_n)$$

et  $\delta_x$  est bien  $\sigma$ -additive.

**Exercice 2.** (Mesure de comptage) Montrons que la mesure de comptable  $\nu$  est une mesure sur  $(\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P}(\Omega))$ . On a en effet :

- Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\nu(A) \geq 0$ ;
- $\nu(\emptyset) = \text{Card}(\emptyset) = 0$ ;
- Soit  $(A_n)_n \subset \mathcal{P}(\Omega)$  une suite d.d.d., alors on a deux cas.
  - Si l'un des  $A_n$  n'est pas fini, alors

$$\nu \left( \bigsqcup_n A_n \right) = +\infty = \sum_n \nu(A_n).$$

- Si tous les  $A_n$  sont finis, alors

$$\nu \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \text{Card} \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \sum_n \text{Card}(A_n) = \sum_n \nu(A_n),$$

et  $\nu$  est donc  $\sigma$ -additive.

**Exercice 3.** (Mesure sur la tribu induite) Soit  $A \in \mathcal{T}$ . Montrons que  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_A)$  est un espace mesuré. Comme  $\mathcal{T}$  est une tribu,  $(\Omega, \mathcal{T})$  est un espace mesurable et il suffit de montrer que  $\mu_A$  est une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{T})$ . C'est le cas car, en effet :

- Pour tout  $B \in \mathcal{T}$ ,  $\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \geq 0$  car  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$  ;
- On a  $\mu_A(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$  car  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$  ;
- Soit  $(B_n)_n \subset \mathcal{T}$  une suite d.d.d., alors

$$\mu_A \left( \bigsqcup_n B_n \right) = \mu \left( A \cap \bigsqcup_n B_n \right) = \mu \left( \bigcup_n (A \cap B_n) \right) = \sum_n \mu(A \cap B_n) = \sum_n \mu_A(B_n),$$

car la suite  $(A \cap B_n)_n \subset \mathcal{T}$  est aussi d.d.d. puisque  $(B_n)_n$  l'est, et  $\mu$  est  $\sigma$ -additive. Montrons maintenant que  $(A, \mathcal{T}_A, \mu_A)$  est un espace mesuré. Il suffit de montrer que  $\mathcal{T}_A$  est une tribu car on sait déjà que  $\mu_A$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$  et donc aussi sur  $\mathcal{T}_A$ . Il s'agit bien d'une tribu car :

- $A = \Omega \cap A \in \mathcal{T}_A$  ;
- Soit  $B \cap A \in \mathcal{T}_A$  où  $B \in \mathcal{T}$ , alors  $A \setminus (B \cap A) = B^c \cap A \in \mathcal{T}_A$  car  $B^c \in \mathcal{T}$  puisque  $\mathcal{T}$  est une tribu ;
- Soit  $(B_n \cap A)_n \subset \mathcal{T}_A$  une suite où  $B_n \in \mathcal{T}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors, comme  $\bigcup_n B_n \in \mathcal{T}$ , on a

$$\bigcup_n (B_n \cap A) = A \cap \bigcup_n B_n \in \mathcal{T}_A.$$

**Exercice 4.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  et  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Montrons que  $\lambda\mu$  définit une mesure sur  $(\Omega, \mathcal{T})$ . On a en effet :

- Pour tout  $A \in \mathcal{T}$ ,  $\lambda\mu(A) \geq 0$  car  $\lambda \geq 0$  et  $\mu$  est une mesure ;
- On a  $\lambda\mu(\emptyset) = \lambda \times 0 = 0$  car  $\mu$  est une mesure ;
- Soit  $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$  une suite d.d.d., alors

$$\lambda\mu \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \lambda \times \mu \left( \bigsqcup_n A_n \right) = \lambda \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \lambda\mu(A_n),$$

car  $\mu$  est  $\sigma$ -additive.

Ainsi, soit  $A \in \mathcal{T}$  tel que  $0 < \mu(A) < \infty$ , alors on peut choisir  $\lambda = \frac{1}{\mu(A)} > 0$  et  $\mu_A(\cdot)/\mu(A)$  est une mesure sur  $(A, \mathcal{T}_A)$ . De plus, on a  $\mu_A(A)/\mu(A) = 1$  et il s'agit bien d'une mesure de probabilité sur  $(A, \mathcal{T}_A)$ .

**Exercice 5.** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si  $A \in \mathcal{T}$  alors  $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c)$ .  
VRAI. En effet,  $A \cap A^c = \emptyset$  et  $A \cup A^c = \Omega$ , donc par  $\sigma$ -additivité on a bien  $\mu(\Omega) = \mu(A \cup A^c) = \mu(A) + \mu(A^c)$ .
2. Si  $A, B \in \mathcal{T}$  et  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$  alors  $A$  et  $B$  sont disjoints.  
FAUX. Il est tout à fait possible que  $\mu(A \cap B) = 0$  sans que  $A \cap B = \emptyset$ . Par exemple, si  $\mu = \lambda$  est la mesure de Lebesgue,  $A = [1, 2]$  et  $B = [2, 3]$ , alors  $\mu(A \cap B) = \mu([1, 3]) = 2 = 1 + 1 = \mu(A) + \mu(B)$  mais  $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$ .
3. Il existe un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  tel que  $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 2\}$ .  
VRAI. On choisit  $\Omega = \{x_1, x_2\}$ , où  $x_1 \neq x_2$ , et  $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \Omega\}$ . On définit une fonction  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}_+$  par  $\mu(\emptyset) = 0$ ,  $\mu(\{x_1\}) = \mu(\{x_2\}) = 1$  et  $\mu(\Omega) = 2$ . Ainsi  $\mu$  est bien une mesure sur  $\mathcal{T}$  car :
  - Pour tout  $A \in \mathcal{T}$ ,  $\mu(A) \geq 0$  ;

- On a bien  $\mu(\emptyset) = 0$  ;
- La seule union disjointe possible avec des éléments non-vides est  $A_1 \cup A_2$  avec  $A_1 = \{x_1\}$  et  $A_2 = \{x_2\}$  et on a

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(\Omega) = 2 = 1 + 1 = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

donc  $\mu$  est bien  $\sigma$ -additive.

4. Il existe un espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  tel que  $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 3\}$ .  
 FAUX. Si tel était le cas, alors on aurait nécessairement  $\mu(\Omega) = 3$  et si  $\mu(A) = 1$  alors  $\mu(A^c) = 3 - \mu(A) = 3 - 1 = 2$ . Or  $A^c \in \mathcal{T}$  car  $A \in \mathcal{T}$  mais il n'y a pourtant aucun élément de la tribu de mesure 2, ce qui est impossible.
5. Soient  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$  et  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des mesures sur  $\mathcal{T}$  telles que  $\mu_1(A) = \mu_2(A)$  pour tous  $A \in \mathcal{E}$ . Est-ce que  $\mu_1 = \mu_2$  ?  
 FAUX. Il faut que les mesures soient finies. Par exemple si  $\mu_1$  est la longueur d'un intervalle et  $\mu_2 = 2\mu_1$ , alors  $\mu_1$  et  $\mu_2$  coïncident sur les ensembles de type  $[a, +\infty[$  pour tout  $a \in \mathbb{R}$  donné (leurs mesures sont infinies) mais on a pas  $\mu_1 = \mu_2$  sur  $\mathcal{T}(\{[a, +\infty[ : a \in \mathbb{R}\}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .

**Exercice 6.** Soit  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesurable. On suppose  $\mu(\Omega) < \infty$ . Montrons que

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \mu(\Omega) \text{ ou } \mu(A) = 0\} \text{ est une tribu.}$$

C'est en effet le cas car :

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ;
- $\Omega \in \mathcal{A}$  de manière évidente ;
- Soit  $A \in \mathcal{A}$ , alors :
  - Si  $\mu(A) = \mu(\Omega)$ , on a  $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A) = 0$ , donc  $A^c \in \mathcal{A}$ .
  - Si  $\mu(A) = 0$ , alors  $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A) = \mu(\Omega)$ , donc  $A^c \in \mathcal{A}$ .
- Soit  $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$ , alors :
  - Si il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $\mu(A_k) = \mu(\Omega)$ , alors  $\mu(\bigcup_n A_n) \geq \mu(A_k) = \mu(\Omega)$ . De plus, comme  $\mu(\Omega) \geq \mu(\bigcup_n A_n)$  car  $\bigcup_n A_n \subset \Omega$ , on en déduit que  $\mu(\bigcup_n A_n) = \mu(\Omega)$  et donc que  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ .
  - Si pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(A_n) = 0$ , alors par sous-additivité de  $\mu$ , on a  $\mu(\bigcup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$ . Comme  $\mu(A) \geq 0$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ , on en déduit que  $\mu(\bigcup_n A_n) = 0$ , et donc que  $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$ .

**Exercice 7.** Soient  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré,  $A, B \in \mathcal{T}$  et  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  une suite finie d'éléments dans  $\mathcal{T}$ .

1. Montrons que si  $\mu(A) < \infty$  alors  $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$ . On rappelle que  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$ . Supposons, sans perdre de généralité (quitte à inverser  $A$  et  $B$  car  $A \Delta B = B \Delta A$ ), que  $\mu(B) < \mu(A)$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mu(A \Delta B) - \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B^c) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) + \mu(B) \\ &\geq \mu((A \cap B^c) \cup B) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) \\ &= \mu(A) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) \\ &= \mu(B \cap A^c) \geq 0. \end{aligned}$$

Cela revient à dire que  $|\mu(A) - \mu(B)| = \mu(A) - \mu(B) \leq \mu(A \Delta B)$ .

2. Montrons que si  $\mu(A) + \mu(B) > \mu(\Omega)$  alors  $A \cap B \neq \emptyset$  et  $\mu(A \cap B) > 0$ . On raisonne par contraposée et suppose que  $A \cap B = \emptyset$  ou  $\mu(A \cap B) = 0$ . Montrons que  $\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(\Omega)$ . On a en effet :

- Si  $A \cap B = \emptyset$ , on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(\Omega)$  car  $A \cup B \subset \Omega$ .
- Si  $\mu(A \cap B) = 0$ , alors, comme  $A \Delta B \subset \Omega$ ,

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B) = \mu(A \Delta B) + \mu(A \cap B) = \mu(A \Delta B) \leq \mu(\Omega).$$

3. Montrons que si  $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$  alors il existe un indice  $j$  tel que  $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(\Omega)}{n}$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $\mu(A_j) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$ , on a alors

$$\mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j) < \sum_{j=1}^n \frac{\mu(\Omega)}{n} = \mu(\Omega),$$

ce qui est impossible. Ainsi, il existe  $j \in \{1, \dots, n\}$  tel que  $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(\Omega)}{n}$ .

**Exercice 8.** (★) Supposons que la mesure  $\mu$  de l'espace mesuré  $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$  est  $\sigma$ -finie. Montrons qu'il existe une suite  $(A_n) \subset \mathcal{T}$  d.d.d. telle que  $\mu(A_n) < \infty$  et  $\Omega = \bigcup_n A_n$ .

En effet, si  $\mu$  est  $\sigma$ -finie, il existe une famille dénombrable  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$  telle que  $\Omega = \bigcup_n B_n$  et  $\mu(B_n) < \infty$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On peut construire une famille  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en définissant

$$A_0 = B_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = A'_n \setminus A'_{n-1} \quad \text{où } A'_n = \bigcup_{0 \leq k \leq n} B_k.$$

On a ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \in \mathcal{T}$  car  $\mathcal{T}$  est une tribu, donc stable par union et passage au complémentaire ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(A_n) \leq \mu(A'_n) < \sum_{k=0}^n \mu(B_k) < \infty$  ;
- $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = \Omega$  car pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A'_n \subset A'_{n+1}$  ;
- Pour tout  $i < j$  où  $i, j \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= (A'_i \setminus A'_{i-1}) \cap (A'_j \setminus A'_{j-1}) \\ &= \bigcup_{0 \leq k \leq i} B_k \cap \left( \bigcup_{0 \leq k \leq i-1} B_k \right)^c \cap \bigcup_{0 \leq k \leq j} B_k \cap \left( \bigcup_{0 \leq k \leq j-1} B_k \right)^c \\ &= \left( \bigcup_{0 \leq k \leq i} B_k \right) \cap \left( \bigcap_{0 \leq k \leq i-1} B_k^c \right) \cap \left( \bigcup_{0 \leq k \leq j} B_k \right) \cap \left( \bigcap_{0 \leq k \leq j-1} B_k^c \right) \\ &= \left( \bigcup_{0 \leq k \leq i} B_k \right) \cap \left( \bigcap_{0 \leq k \leq j-1} B_k^c \right) = \emptyset. \end{aligned}$$

Le même argument montre que  $A_0 \cap A_j = \emptyset$  pour tout  $j > 0$ .

**Exercice 9.** (★) Montrons que la mesure de Lebesgue  $\lambda_n$  sur  $\mathbb{R}^n$  est invariante par translation, i.e.,  $\lambda_n(A) = \lambda_n(\vec{a} + A)$  pour tout  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  et pour tout  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .

Il suffit de le montrer pour les pavés connexes fermés  $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$  qui génèrent les boréliens de  $\mathbb{R}^d$ . En effet, en notant  $\vec{a} = (x_1, \dots, x_n)$ , on a

$$\begin{aligned} & \lambda_n(\vec{a} + [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]) \\ &= \lambda_n([a_1 + 1, b_1 + x_1] \times [a_2 + x_2, b_2 + x_2] \times \dots \times [a_n + x_n, b_n + x_n]) \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i + x_i - (a_i + x_i)) \\ &= \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \\ &= \lambda_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]). \end{aligned}$$

**Exercice 10. (théorème du récurrence de Poincaré)(★)** On suppose  $\mu(\Omega) < \infty$ . Soit  $f$  une application mesurable  $f : \Omega \rightarrow \Omega$  qui *préserve la mesure*  $\mu$ , c'est-à-dire que  $\mu(X) = \mu(f^{-1}(X))$ ,  $\forall X \in \mathcal{T}$ . On pose  $f^1 \stackrel{\text{def}}{=} f$  et  $f^{n+1} \stackrel{\text{def}}{=} f^n \circ f$ ,  $\forall n \geq 1$ .

1. Montrons que  $f^n$  préserve  $\mu$  pour tout  $n \geq 1$ .

On raisonne par récurrence sur  $n \geq 1$ . L'initialisation est immédiate car, pour  $n = 1$ ,  $f = f^1$  et  $f$  préserve la mesure.

Pour démontrer l'hérédité, supposons que la propriété est vraie pour  $n \geq 1$  et montrons-la pour  $n + 1$ . On a, pour tout  $X \in \mathcal{T}$ ,

$$\mu((f^{n+1})^{-1}(X)) = \mu((f^n \circ f)^{-1}(X)) = \mu(f^{-1}((f^n)^{-1}(X))).$$

Comme  $f$  est mesurable, alors  $(f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}$  et comme  $f$  préserve la mesure, on a donc, pour tout  $X \in \mathcal{T}$ ,

$$\mu(f^{-1}((f^n)^{-1}(X))) = \mu((f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}).$$

Par hypothèse de récurrence,  $f^n$  préserve la mesure et on obtient donc

$$\mu((f^{n+1})^{-1}(X)) = \mu((f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}) = \mu(X),$$

ce qui montre que  $f^{n+1}$  préserve la mesure  $\mu$ . Ainsi, par récurrence, on obtient que pour tout  $n \geq 1$ ,  $f^n$  préserve la mesure  $\mu$ .

2. On fixe un  $A \in \mathcal{T}$  et on désigne  $F \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A : f^n(x) \notin A, \forall n \geq 1\}$ . ( $F$  est l'ensemble des points de  $A$  qui ne retournent pas à  $A$  sous l'action de  $f$ .) Montrons que  $(f^n)^{-1}(F) \cap F = \emptyset$ ,  $\forall n \geq 1$ .

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $x \in (f^n)^{-1}(F) \cap F$ , alors :

- Comme  $x \in F$ , on a :  $x \in A$  et  $\forall n \geq 1$ ,  $f^n(x) \notin A$ ;
- Comme  $x \in (f^n)^{-1}(F)$ , alors  $f^n(x) \in F$  donc  $f^n(x) \in A$ .

Il y a donc une contradiction, ce qui veut dire que  $(f^n)^{-1}(F) \cap F = \emptyset$ ,  $\forall n \geq 1$ .

3. Montrer que  $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$  si  $m \neq n$ .

Encore une fois, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe  $x \in (f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F)$ . On a donc

- $x \in (f^n)^{-1}(F) \Rightarrow f^n(x) \in F$ , et donc  $f^n(x) \in A$  et  $f^{n+k}(x) \notin A$  pour tout  $k \geq 1$ ;

- $x \in (f^m)^{-1}(F) \Rightarrow f^m(x) \in F$ , et donc  $f^m(x) \in A$  et  $f^{m+k}(x) \notin A$  pour tout  $k \geq 1$ .

Comme on peut supposer sans perdre de généralité que  $m > n$ , alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $m = k + n$  et on a à la fois  $f^m(x) \in A$  (par le deuxième point) et  $f^{n+k}(x) \notin A$  (par le premier point), ce qui est impossible. On a donc une contradiction et  $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$  si  $m \neq n$ .

4. Montrons que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in A$  il existe  $n = n(x) \geq 1$  tel que  $f^n(x) \in A$ , c'est-à-dire que  $\mu(F) = 0$ .

On sait que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu(F) = \mu((f^n)^{-1}(F))$ . Or on sait que pour tout  $m \neq n$ , on a  $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$ , ce qui implique que

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu((f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F)) = \mu((f^n)^{-1}(F)) + \mu((f^m)^{-1}(F)) = 2\mu(F).$$

On a donc obtenu que  $\mu(F) = 0$ .

**Exercice 11.** (Non-corrigé)

**Exercice 12.** (Non-corrigé)

**Exercice 13.** Soit  $f : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$  une fonction mesurable. Rappelons que si  $\mu$  est une mesure sur l'espace mesurable  $(\Omega, \mathcal{T})$  alors  $\mu_f(A) \stackrel{\text{def}}{=} \mu(f^{-1}(A))$ ,  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ , est une mesure sur  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  appelée *la mesure image de  $\mu$  par  $f$* .

1. Soit  $\{a\} \in \mathcal{T}$ . Déterminons  $\mu_f$  si  $\mu = \delta_a$ .

On a, par définition,  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\mu_f(A) = \delta_a(f^{-1}(A))$  qui vaut 0 si  $a \notin f^{-1}(A)$  et 1 sinon, c'est-à-dire que  $\mu_f(A) = 0$  si  $f(a) \notin A$  et  $\mu_f(A) = 1$  si  $f(a) \in A$ . On a donc  $\mu_f = \delta_{f(a)}$ .

2. On suppose que  $\mu(\Omega) = 1$ . Soit  $n = 1$  et  $B \in \mathcal{T}$ . Déterminons  $\mu_{1_B}$ .

Par définition, on a :  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$   $\mu_{1_B}(A) = \mu(1_B^{-1}(A))$ . On a donc, pour  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$  :

- $\mu_{1_B}(A) = \mu(\emptyset) = 0$  si  $A \cap \{0, 1\} = \emptyset$  ;
- $\mu_{1_B}(A) = \mu(B^c) = 1 - \mu(A)$  si  $A \cap \{0, 1\} = \{0\}$  ;
- $\mu_{1_B}(A) = \mu(B)$  si  $A \cap \{0, 1\} = \{1\}$  ;
- $\mu_{1_B}(A) = \mu(\Omega) = 1$  si  $\{0, 1\} \subset A$ .

On a donc  $\mu_{1_B} = \mu(B)\delta_1 + (1 - \mu(B))\delta_0$ .

3. On suppose que  $\mu(\Omega) < +\infty$  et que  $f(\Omega)$  est fini. Déterminons  $\mu_f$ .

Encore une fois, par définition :  $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$ . On a donc

- $f(\Omega)$  fini  $\Rightarrow f$  est une fonction étagée, c'est-à-dire qu'il existe une partition finie  $(A_k)_{0 \leq k \leq n} \subset \Omega$  et des réels  $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$  tels que  $\forall x \in \Omega$ ,  $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k 1_{A_k}(x)$ .
- $\mu_f(\mathbb{R}^d) = \mu(f^{-1}(\mathbb{R}^d)) = \mu(\Omega) < \infty$ , et donc la mesure  $\mu_f$  est finie.

On en déduit que  $\mu_f = \sum_{k=0}^n \mu(A_k)\delta_{\alpha_k}$ .

**Exercice 14.** Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}$ . Montrons que  $\lambda(U) = 0$  si et seulement si  $U = \emptyset$ . Si  $U = \emptyset$ , il est évident que  $\lambda(U) = 0$ . Montrons la réciproque par contraposée en supposant que  $U \neq \emptyset$  est un ouvert. Alors  $U$  contient un intervalle  $]x - r, x + r[$  centrée en  $x \in U$  et de longueur  $2r > 0$ . Ainsi  $\lambda(U) \geq \lambda(]x - r, x + r[) = 2r > 0$ . On a donc montré que  $\lambda(U) = 0 \Rightarrow U = \emptyset$ .

**Exercice 15.** (Non-corrigé)

**Exercice 16.** Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

VRAI. En effet, soit  $A$  négligeable (c'est-à-dire  $\mu(A) = 0$ ) et  $B \subset A$ , alors  $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = 0$  et donc  $\mu(B) = 0$ .

2. Une union a.p.d. d'ensembles négligeables est négligeable.

VRAI. Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une suite d'ensembles négligeables où  $I \subset \mathbb{N}$ . Alors on a, par sous-additivité,

$$0 \leq \mu \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i) = 0,$$

et donc  $\mu \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) = 0$ .

3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

FAUX. On sait que  $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  est négligeable pour la mesure de Lebesgue, mais  $\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\} = [0, 1]$  n'est pas négligeable pour la mesure de Lebesgue.

**Exercice 17.** (Non-corrigé)

**Exercice 18.** (Non-corrigé)