Corrigé - Interrogation II

Question de cours.

Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $F \subseteq X$. Donner une condition suffisante et nécessaire pour que F soit un fermé de X.
   F est un fermé si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de F qui converge vers un élément x de X, alors x appartient à F.
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $F_n = [0, 1 - \frac{1}{n+1}]$, c'est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ donc un fermé mais $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = [0, 1[$ qui n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers une fonction f.

1. Montrer que f est bornée.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée donc il existe $m_n \in \mathbb{R}$, $m_n > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|f_n(x)| \leq m_n$. On pose $\varepsilon = 1$, puisque f_n converge uniformément vers f alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq 1$. On a donc en particulier pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |f(x) - f_N(x)| &\leq 1 \quad \textit{donc} \\ |f(x)| &\leq 1 + f_N(x) \ \textit{d'où} \\ |f(x)| &\leq 1 + m_N \end{aligned}$$

   on en déduit que f est bornée.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n(x) = \begin{cases} x & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que f_n est bornée.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \in [-n, n]$ donc f_n est bornée.
3. Montrer que (f_n) converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$ et que f n'est pas bornée. Que peut-on en déduire ?
   Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$ donnés. On choisit N tel que $N \geq |x|$ (par exemple $N = \lfloor |x| \rfloor + 1$). Alors $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N$ on a $|x| \leq n$ et donc $f_n(x) = x$ et $|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$. Ceci montre que (f_n) converge simplement vers f. D'autre part, on voit facilement que f n'est pas bornée. D'après la question (1), on conclut donc que (f_n) ne converge pas uniformément vers f.