Corrigé-Interrogation II

Durée 45mn

QUESTION DE COURS.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui converge uniformément vers une fonction f.
Considérons un réel a.
Montrer que si pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en a, alors f est également continue en a.

Soit $\varepsilon > 0$.
Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, il existe en particulier $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait $|f_{n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Par continuité de f_{n_0} au point a, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-a| < \delta$, on a (par inégalité triangulaire)

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)| < 3\varepsilon.$$

On en déduit que f est continue en a.

EXERCICE 1.

Soit $f : E \to F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.
Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.

1. *Montrons que $f(A\cap f^{-1}(B)) \subseteq f(A) \cap B$. Soit $y \in f(A \cap f^{-1}(B))$. Alors, il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, on a $y = f(x) \in f(A)$ et comme $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, on en déduit également que $y \in B$, d'où $y \in f(A) \cap B$.*
2. *Montrons que $f(A)\cap B \subseteq f(A\cap f^{-1}(B))$. Soit $y \in f(A)\cap B$. Alors, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, on a $x \in f^{-1}(B)$ et donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$, puis $y = f(x) \in f(A \cap f^{-1}(B))$.*

EXERCICE 2.

Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, on considère l'ensemble

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 \leq \sin y\}.$$

1. A est-il fermé ?
   Considérons l'application $f : (x,y) \mapsto x^2 - \sin y$ définie sur $\mathbb{R}^2$. Cette application est continue comme composée de fonctions continues. Alors $A = f^{-1}(]-\infty, 0])$ est un fermé car image réciproque par une application continue d'un fermé.
2. A est-il compact ?
   Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le point $(0, k\pi)$ appartient à A. L'ensemble A n'est donc pas borné et en particulier, il ne peut être compact.