2018/2019 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Corrigé-Interrogation III

Durée 45mn

Exercice.

1. On fixe un réel $t < -1$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}$ est intégrale sur $]0, +\infty[$.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}$ est positive et continue sur $]0, +\infty[$.

   En 0, on a $\dfrac{e^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1$ (soit par développement limité, soit par définition de la dérivée). Ainsi, $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}$ est prolongeable par continuité en 0.

   En $+\infty$, pour $x \geq 1$, on a $\dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx} \leq e^{(1+t)x}$ et comme $1 + t < 0$, on en déduit que $\int_1^{+\infty} e^{(1+t)x}\, dx < +\infty$.

   Ainsi, $\int_0^{+\infty} \frac{e^x-1}{x}\, e^{tx}\, dx < +\infty$ et la fonction positive continue $x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}$ est intégrale sur $]0, +\infty[$.

   Dans la suite de l'exercice, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}\, dx$ pour tout $t \in]-\infty, -1[$.

2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, -1[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.

   On pose $f(x, t) = \dfrac{e^x - 1}{x}\, e^{tx}$ pour $(t, x) \in]-\infty, -1[\times]0, +\infty[$.

   (a) *On a vu dans la question précédente que pour tout $t < -1$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.*

   (b) *Notons que comme composée de fonctions de classe C^∞, la fonction f est C^∞ sur $]-\infty, -1[\times]0, +\infty[$, et en particulier :*
   - *pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est C^1 sur $]-\infty, -1[$;*
   - *pour tout $t < -1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ est continue donc borélienne sur $]0, +\infty[$.*

   (c) *Soit $a < -1$. Pour tout $t < a$ et tout $x > 0$, on a*

   $$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\right| = (e^x - 1)e^{tx} \leq e^x e^{ax} = e^{(1+a)x}$$

   et comme $1 + a < 0$, la fonction $x \mapsto e^{(1+a)x}$ est intégrale sur $]0, +\infty[$.

Par le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres, on en déduit que F est C^1 sur $]-\infty, a[$ pour tout $a < -1$ et donc sur $]-\infty, -1[$. De plus, pour tout $t < -1$, on a alors

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} (e^x - 1)\, e^{tx}\, dx = -\frac{1}{1+t} + \frac{1}{t}.$$

3. Déterminer la limite de $F(t)$ quand t tend vers $-\infty$.
   (a) *Rappelons que pour tout $t < -1$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue donc borélienne.*
   (b) *Pour tout $x > 0$, comme $e^{tx} \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$, on a $f(x,t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0$.*
   (c) *Pour tout $t < -2$, on a pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x,t) \leq f(x,-2)$ et on a vu dans la première question que $x \mapsto f(x,-2)$ est intégrable sur $]0,\infty[$.*

   On en déduit par le théorème de convergence dominée que

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = \lim_{t\to-\infty} \int_0^{+\infty} f(x,t)\, dx = \int_0^{+\infty} \lim_{t\to-\infty} f(x,t)\, dx = \int_0^{+\infty} 0\, dx = 0.$$

4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(t)$ pour tout $t < -1$ qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.

   D'après la question 2, F est une primitive de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$. Il existe donc une constante C telle que pour tout $t < -1$,

$$F(t) = \ln(|t|) - \ln(|1+t|) + C = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right) + C.$$

   En passant à la limite en $-\infty$, on en déduit que $C = 0$ et donc pour tout $t < -1$,

$$F(t) = \ln\left(\frac{t}{1+t}\right).$$