Semaine 17-21 sept

2018/2019
Université Lyon I

Semestre d'automne - L3 MathEco
Topologie et Théorie de la mesure

Feuille d'exercices I.

Espaces vectoriels normés

cours +- **Exercice 1.** 1. Rappeler la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, qui sera notée par la suite $\|\cdot\|_2$.

2. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

admis **Exercice 2.** Montrer que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d \colon E \times E \to [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

à faire merc. **Exercice 3.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
2. $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. (Indication, on pourra majorer $\|2x\|$ et $\|2y\|$.)

cours +- **Exercice 4.** Représenter les boules unités ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

cours +- **Exercice 5.** Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$, la norme du sup et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ sont toutes trois équivalentes.

à faire merc. **Exercice 6.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Pour tout vecteur x de E et réel $r > 0$, on note $B_1(x, r)$ et $B_2(x, r)$ les boules ouvertes de centre x et de rayon r dans (E, N_1) et (E, N_2) respectivement. Soit un réel $k > 0$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in E,\ N_2(x) \leq k N_1(x)$; ← corriger $\frac{1}{k}$.
2. $\forall x \in E,\ \forall r \in]0, +\infty[,\ B_1(x, r) \subseteq B_2(x, r/k)$;
3. $B_1(0_E, 1) \subseteq B_2(0_E, 1/k)$.

admis **Exercice 7.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x, y) dans $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \quad ,$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\}$$

sont des normes sur $E \times F$. On appelle ces normes, *normes produits*.
Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

à faire mercredi (ancien ex 7) **Exercice 8.** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Rappeler la définition (avec des quantificateurs) de la convergence d'une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ d'éléments de E vers $x \in E$.

2. Que peut-ont dire d'une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E qui vérifie pour $y \in E$ la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N\ \|y_n - y\| \leq \varepsilon\ .$$

à faire mercredi

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normée et $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de E qui convergent respectivement vers x, y. Montrer que $\|x_n - y_n\|$ converge vers $\|x - y\|$.

admis

Exercice 10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une suite $(x_n, y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $E \times F$ converge vers (x, y) pour l'une des normes produits (introduites dans l'exercice ??) si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y.

cherch. merc.

Exercice 11. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f \colon [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f, r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

cherch. merc

Exercice 12. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X. Supposons d'abord que les suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Montrer que (x_n) est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de (x_{2k}) et (x_{2k+1}) sont égales ?
Montrer que si (x_{2k}), (x_{2k+1}) et (x_{3k}) sont toutes les trois convergentes alors (x_n) est convergente.

Exercice 14. Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

   a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

   b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

2. On note $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni ouverte ni fermée.

Exercice 15. 1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 16. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 17. On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.
2. Construire une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les ensembles suivants soient deux à deux distincts : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

Exercice 18. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.

Exercice 19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est également un sous-espace vectoriel de E.

TOPOLOGIE ET MESURE
L3 Maths pour l'économie

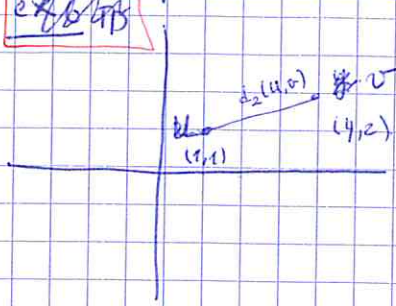
Chapitre 1 — Espaces métriques.

1.1 Distances

exemples de distances : ~~$\mathbb{R}^2$, d_2~~, d $\mathbb{R}$: x y

$d(x,y) = |x-y|$

ex 1.1



$\mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ $u = (a_1, b_1)$, $v = (a_2, b_2)$.

$$d_2(u,v) = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1+b_2)^2} \qquad = \sqrt{10}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{2} |a_i - b_i|^2 \right)^{1/2}.$$

$$d_n(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{2} |a_i - b_i|^n \right)^{1/n}.$$

en particulier $d_1(u,v) = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| \qquad = 4$

$$d_\infty(u,v) = \max_{i=1,2} |a_i - b_i| \qquad = 3$$

En général pour $\mathbb{R}^n$ même chose.

EX 1.2

~~$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z)$~~

~~$d(x,y) - d(y,z) \leq d$~~

① $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. IT

$\Rightarrow$ $\boxed{d(x,z) - d(y,z) \leq d(x,y)}$

② $d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z)$.

$\Rightarrow$ $d(y,z) \leq d(x,y) + d(x,z)$.

$\Rightarrow$ $\boxed{d(x,z) - d(y,z) \geq - d(x,y)}$

$\Rightarrow$ $| d(x,z) - d(y,z) | \leq d(x,y)$.

Ex 1.4 (Ex 1 TD)

1) $\mathbb{R}^n \ni u = (x_1, .., x_n)$; $\|u\|_2 = \sqrt{x_1^2 + .. + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$.

2) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ est une norme :

i) $x = 0 \Rightarrow \|x\|_1 = 0$
$\|x\|_1 = 0 \Rightarrow \sum |x_i| = 0 \Rightarrow |x_i| = 0 \Rightarrow x = 0$

$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ $x = 0 \Leftrightarrow \|x\|_\infty = 0$ évident.

Ex 1.5 (Ex 2 TD) $(X, \|\ \|)$ normé $d(x,y) = \|x-y\|$ distance

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \|x-y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $d(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = \|y-x\| = d(y,x)$
3) $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\|$
$\leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$

Ex 1.6 (Ex 3 TD)

1) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2) $\cancel{d(x,y)} =$ si $x = y$ $d(x,y) = d(y,x) = 0$
$x \neq y$ $d(x,y) = d(y,x) = 1$.
3) $x, y, z \in X$. • si $x \neq y$ ou $y \neq z$
$d(x,y) = 1$ ou $d(y,z) = 1$
donc $d(x,z) \leq 1 \leq d(x,y) + d(y,z)$

• si $x = y$ et $y = z$ alors $x = z$.
$d(x,z) = 0 = d(x,y) + d(y,z)$.

TD Ex 4 a) $d_1(x,y) = (x-y)^2$ non inégalité triangulaire
Fausse
ex : x ou $z < 0$ et $y = 0$.
$d(x,z) > d(x,y) + d(y,z)$.

b) $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ oui

inégal. T $\left(\sqrt{|x-z|}\right)^2 = |x-z|$.
$\left(\sqrt{|x-y|} + \sqrt{|y-z|}\right)^2 = |x-y| + |y-z| + 2\sqrt{|x-y||y-z|}$

et $|x-z| \leq |x-y| + |y-z| \leq |x-y| + |y-z| + 2\sqrt{\ldots}$.

c) $d_3(x,y) = |2x - y|$ $x = 1, y = 2$ (1) faux.
d) $d_4(x,y) = |x^2 - y^2|$ $x = 2$ $y = -2$ $d_4(x,y) = 0$ et $x \neq y$

Ex 1.8 TD Ex 5 Boules ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}^2$ centre $(0,1)$
rayon 1

~~Ex~~

EX 1.9

distance discrète sur X

$x \in X$, $r > 0 \in \mathbb{R}$

$B_{x,r}$ et $\overline{B_{x,r}}$ $= X$ pour $r > 1$

$\overline{B_{x,r}} = \{x\}$

$B_{x,1} = \{x\}$

$\overline{B_{x,1}} = X$

1.2 suites dans un espace métrique

EX 7 TD

1) $(x_n)_{n \geq 0} \to x$ ssi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon$

2)

Voyons $\forall n \geq N \quad y_n = y$.

Soit $n_0 \geq N$ et supposons $y_{n_0} \neq y$.

notons $\varepsilon = \frac{1}{2} d(y_{n_0}, y) \neq 0$.

alors $\forall n \geq N \quad d(y_n, y) \leq \varepsilon$

en particulier $d(y_0, y) \leq \varepsilon = \frac{1}{2} d(y_0, y)$ ↯.

ex 1.12

EX 8 TD

$x_n \to x$

$x_n \to x'$

notons $\varepsilon = \frac{1}{4} d(x, x')$

$\exists N_1$ tq $\forall n \geq N_1 \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon$

$\exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad d(x_n, x') \leq \varepsilon$

$N = \max N_1, N_2 \Rightarrow \forall n \geq N \quad d(x_n, x) \leq \varepsilon$ et $d(x_n, x') \leq \varepsilon$

~~or alors~~ $d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x_n, x') \leq \frac{1}{2} d(x, x')$ ↯

EX 9 TD

$(x_n) \to x$

$(y_n) \to y$ $\Rightarrow$

Soit $\varepsilon > 0$. alors $\exists N_1, \forall n \geq N_1 \quad d(x_n, x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists N_2 \quad \forall n \geq N_2 \quad d(y_n, y) \leq \frac{\varepsilon}{2}$

soit $N = \max(N_1, N_2)$.

alors $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y_n, y)$

$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

De même $d(x, y) \leq d(x_n, x) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

$\Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x, y) \geq -\varepsilon$.

$\Rightarrow |d(x_n, y_n) - d(x, y)| \leq \varepsilon$ □.

EX 1.13
TD 10

Voyons $(x_n, y_n) \to (x,y) \Leftrightarrow (x_n) \to x$ et $(y_n) \to y$.

"$\Rightarrow$" Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\exists N ; \forall n \geq n$ $d_\infty((x_n,y_n),(x,y)) \leq \varepsilon$

et $d_X(x_n, x) \leq d_\infty((x_n,y_n)(x,y)) \leq \varepsilon$.

$\Rightarrow \forall n \geq N$ $d_X(x_n, x) \leq \varepsilon$ et $(x_n) \to x$.

De même pour $(y_n) \to y$.

"$\Leftarrow$" $(x_n) \to x$, $(y_n) \to y$.

Soit $\varepsilon > 0$, et N_1 tq $\forall n \geq N_1$ $d_X(x_n, x) \leq \varepsilon$
N_2 tq $\forall n \geq N_2$ $d_Y(y_n, y) \leq \varepsilon$.

Alors si $N = \max(N_1, N_2)$, $\forall n \geq N$

$\cancel{\max}$ $d_\infty((x_n,y_n)(x,y)) \leq \varepsilon$. $\square$.

Si on remplace d_1 par d_∞ même ~~raisonnement~~ raisonnement en remplaçant ε par $\frac{\varepsilon}{2}$.

EX 1.15
TD 11

Voyons $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq$ ~~$\sqrt{n}\|x\|_\infty$~~ $\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. , $\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$.
$\|x\|_2 = \sqrt{\sum x_i^2}$

- De façon évidente $|x_i| \leq \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. $\forall i$ donc $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$.
- et $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq$ ~~$\sqrt{n \max x_i^2}$~~ $= \cancel{\sqrt{n} \max |x_i|}$.
  $|x_1| + \dots + |x_n|$ (on élève au carré par ex)
- $|x_1| + \dots + |x_n| \leq n \max |x_i|$ évident

prop
Ex 1.19
TD 16

$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

On pose $\varphi(0) = a_0$ $a_0 \geq 0$ car $a_0 \in \mathbb{N}$
par récurrence on montre $\varphi(k) \geq a_0 + k \geq k$ $\square$.

prop
Ex 1.20
Ex TD 17

$(x_n) \to x$ soit $(x_{\varphi(k)})$ suite extraite

soit $\varepsilon > 0$. Il existe N, $\forall n \geq N$ $d(x_n, x) \leq \varepsilon$.

Puisque $\varphi(n) \geq n$ alors $\forall n \geq N$ $d(x_{\varphi(n)}, x) \leq \varepsilon$

Réciproque: On montre d'abord que si toutes les suites extraites convergent, elles conv. vers la même limite :

- $(x_{\varphi_1(k)})_k \to x_1$ $(x_{\varphi_2(k)})_k \to x_2$

on construit φ ~~(k)~~ $: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par.
$\varphi(2k) = \varphi_1(k)$
$\varphi(2k+1) = \varphi_2(k)$.
ou similaire pour croissant...

~~Puisque~~ $(x_{\varphi(k)})$ converge on a $x_1 = x_2$.

- On regarde les suites $(x_{2n})_{n \geq 0}$ et $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$.

soit $\varepsilon \geq 0$, N_1, N_2 tq $\forall n \geq N_1$ $d(x_{2n}, x) \leq \varepsilon$
$\forall n \geq N_2$ $d(x_{2n+1}, x) \leq \varepsilon$

$N =$ ~~$\max(N_1, N_2) + 1$~~ $\max(2N_1, 2N_2+1)$

on a $\forall n \geq N$ $d(x_n, x) \leq \varepsilon$ $\square$.

Ex 1.21
Ex TD 18

- Fait dans 17.
- si limites différentes pas de convergence ex: $x_n = (-1)^n$.
- supp. (x_{2k}) (x_{2k+1}) (x_{3k}) convergents.

Même raisonnement si $(x_{2k}) \to l$
$(x_{2k+1}) \to l'$

$(x_{3k}) \to x$

On a (x_{6k}) suite extraite de (x_{3k})
donc $(x_{6k}) \to x$ et suite extraite de $(x_{2k}) \to l$
d'où $x = l$
De même (x_{6k+3}) suite extraite de (x_{3k}) et de (x_{2k+1})

d'où $l' = x$. Alors $l = l'$ et on applique 1ère partie $(x_n) \to l$.

1.3 Ouverts et fermés

ex 1.23
EXTD 19

A ouvert $\iff \forall a \in A\ \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \overline{B}(a, \frac{1}{n}) \subseteq A$

"$\Rightarrow$" soit $a \in A$ $\exists r$ tq $B(a,r) \subseteq A$.
on prend n tq $0 < \frac{1}{n} < r$

alors si $b \in \overline{B}(a, \frac{1}{n})$ $d(b,a) \leq \frac{1}{n} < r$
$\Rightarrow b \in B(a,r) \subseteq A$.

"$\Leftarrow$" Soit $a \in A$ et n tq $\overline{B}(a, \frac{1}{n}) \subseteq A$
alors $B(a, \frac{1}{n}) \subseteq \overline{B}(a, \frac{1}{n}) \subseteq A$ et A ouvert.

EXTD

Même exo en remplaçant $\frac{1}{n}$ par r.

EX 1.25
EX TD 20.

1) Pour la distance discrète si $a \in \mathbb{R}$.
$B(a, \frac{1}{2}) = \{a\}$ est un ouvert.

pour la distance usuelle $\{a\}$ n'est pas un ouvert.

2) d_1, d_2 distances équivalentes de X. Voyons
X ouvert de $(X, d_1) \iff X$ ouvert de (X, d_2).

Supposons X ouvert de (X, d_1) et m, M tq $\forall x,y \in X$

$$m\, d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq M\, d_1(x,y)$$

Soit $x \in X$ alors $\exists r > 0$ tq $B_1(x,r) \subseteq X$
où $B_1(x,r) = \{y \in X,\ d_1(x,y) < r\}$

On pose $R = r m$ et soit $y \in B_2(x,R) = \{y, d_2(x,y) < R\}$

alors $d_2(x,y) < R \Rightarrow m\, d_1(x,y) < R$
$\Rightarrow m d_1(x,y) < mr$
$\Rightarrow d_1(x,y) < r$
$\Rightarrow y \in B_1(x,r) \subseteq X$

d'où $B_2(x,R) \subseteq X$.

EX 1.30
EX TD 21

1) Dans $\mathbb{R}$ distance usuelle. $U_n =]0, 1+\frac{1}{n}[$. $n \geq 1$.

$$\bigcap_{n \geq 1} U_n =]0,1] \quad \text{qui n'est pas un ouvert.}$$

2) $F_n = [0, 1-\frac{1}{n}]$ $\quad \bigcup_{n \geq 1} F_n = [0, 1[$

n'est pas fermé.

EX 1.32
EX TD 23

2) $x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0,\ B(x,r) \subseteq A$
"$\Rightarrow$" $x \in \mathring{A} \Rightarrow x \in U$ ouvert $U \subseteq A$
$\Rightarrow \exists r > 0\ B(x,r) \subseteq U \subseteq A$.
"$\Leftarrow$" $x \in B(x,r) \subseteq A$ ouvert contenu dans A $\subseteq \mathring{A}$.

prop 1.34
ex TD 25

1) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$

"$\subseteq$" Soit $x \in \overline{X \setminus A}$ et $\forall U$ ouvert $\subseteq A$.
alors $X \setminus U$ fermé et contient $X \setminus A$
$\Rightarrow$ ~~$X \supseteq$~~ $\Leftrightarrow \forall U \subseteq A$, $x \in X \setminus U$
$\Rightarrow x \notin U \quad \forall \mathring{U} \subseteq A$ ouvert
$\Rightarrow x \notin \mathring{A} \Rightarrow x \in X \setminus \mathring{A}$

"$\supseteq$" $x \in X \setminus \mathring{A} \Rightarrow x \notin \mathring{A} = \bigcup_{\substack{O \subseteq A \\ \text{ouvert}}} O$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{\substack{O \subseteq A \\ \text{ouvert}}} X \setminus O$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{F \supseteq X \setminus A} F = \overline{X \setminus A}$

2) $\mathring{\overline{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A}$

$x \in X \setminus \overline{A} \Leftrightarrow x \in X \setminus \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ \text{fermé}}} F$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{F \supseteq A \\ \text{fermé}}} X \setminus F$

$\Leftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{O \text{ ouvert} \\ O \subseteq X \setminus A}} O = \mathring{\overline{X \setminus A}}$

prop 1.35
ex TD 26

$A \subseteq X$, $x \in X$.
$\exists (x_n) \subseteq' A \quad x_n \to x \Leftrightarrow \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

"$\Rightarrow$" Soit $r > 0 \quad \exists N \; \forall n \geq N \quad d(x_n, x) \leq \frac{r}{2} < r$.
d'où $x_n \in B(x,r) \quad \forall n \geq N$ et $x_n \in A$
d'où $B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

"$\Leftarrow$" ~~Soit $\varepsilon > 0$.~~ On considère $\forall n \quad B(x, \frac{1}{n+1})$
et on pose $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1}) \cap A \quad (\neq \emptyset)$.
~~Alors~~ Soit $\varepsilon > 0$ il existe N tq $\varepsilon > \frac{1}{N+1}$
on a $\forall n \geq N$ puisque $x_n \in B(x, \frac{1}{n+1})$
alors $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon$. $\square$.

Ex 1.37
TD 24

1) $\mathring{\mathbb{Q}} = \emptyset \qquad \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$
2) $\mathring{\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}} = \emptyset \qquad \overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]} = [0,1]$
3) $\mathring{\overline{]0,1[\cap \mathbb{Q}}} = \emptyset \qquad \overline{]0,1[\cap \mathbb{Q}} = [0,1]$

prop 1.38
Ex TD 27
+ prop. 1.39

1) $\overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ} = B(a,r)$

On a clairement $B(a,r) \subseteq \overbrace{\overline{B}(a,r)}^{\circ}$

TD1 2018

EX3 - $(E, \| \ \|)$ normé

1) $\forall x, y \in E \quad | \|x\| - \|y\| | \leq \|x-y\|$

on applique inégalité triangulaire $\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$

- à $z = x \quad w = y - x$ et on obtient

$$\|y\| \leq \|x\| + \|y-x\| = \|x\| + \|x-y\|$$

et donc $\|x\| - \|y\| \geq -\|x-y\|$

- $z = x - y \quad w = y$ et on obtient

$$\|x\| \leq \|y\| + \|x-y\| \quad \square.$$

2) $\forall x, y \in E \quad \|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$

on appl. inég. triang. $\|z+w\| \leq \|z\| + \|w\|$ à

$z = x+y$, $w = x-y$ on a $\|2x\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$

et pareil ~~avec~~ on a $\|2y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$

d'où $\|2x\| + \|2y\| \leq 2\|x+y\| + 2\|x-y\| \quad \square$

EX6 - (1) $\forall x \in E \quad N_2(x) \leq \frac{1}{k} N_1(x)$
(2) $\forall x \in E, \ \forall r \in]0, +\infty[\quad B_1(x, r) \subseteq B_2(x, \frac{r}{k})$
(3) $B_1(0_E, 1) \subseteq B_2(0_E, 1/k)$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Soit $x \in E$, $r \in]0, +\infty[$ et $y \in B_1(x, r)$.

alors $N_1(x-y) < r$ ~~et donc~~ puisque

$k N_2(x-y) \leq N_1(x-y)$. alors $N_2(x-y) < \frac{r}{k}$.

(2) $\Rightarrow$ (3) on prend $x = 0_E$ et $r = 1$

(3) $\Rightarrow$ (2) soit $x \in E$. on pren $y = \frac{x}{N_1(x)}$ alors

$y \in B_1(0_E, 1)$ et donc $y \in B_2(0_E, \frac{1}{k})$

i.e $N_2(y) < \frac{1}{k}$ et donc $\frac{1}{N_1(x)} N_2(x) < \frac{1}{k}$

d'où $N_2(x) \leq \frac{1}{k} N_1(x)$.

EX 8 1) $(x_n)_{n \geq 0} \longrightarrow x$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N$
$\|x_n - x\| \leq \varepsilon$.

2) À partir d'un certain rang la suite est constante et égale à y.
en effet voyons $\forall n \geq N \quad y_n = y$

Numéro	Note/20	Rang	Partie I					Partie II				Partie III										
			1	2	3	4		1	2	3		1	2	3	4		1	2	3			Total
			0,5	0,5	2	1	16	2	2,5	3,5	32	1	2	2	2	28	2	2	2	24		100
88	6,36	24	2	0	3	2	9	0,5	0		1	4	2	3	0	14	0			0		24
42	20,00	1	4	4	4	2	14	4	4	3	28,5	4	4	4	2,5	25	0,5	3	0,5	8		75,5
11	5,10	30	0,5	0	2	1	5,25	1			2	4	2	0,5	1,5	12				0		19,25
90	5,03	31	0	2	2,5	0	6	1		1	5,5	0,5	2	0,5	0	5,5	0	0,5	0,5	2		19
30	6,03	27	4	0	4	2	12	1		0,5	3,75	4	1	0,5		7				0		22,75
76	2,78	38	0	1	2	2	6,5	0,5	0		1	0	0,5	0,5	0	2		0,5	0	1		10,5
85	7,35	21	4	3,5	3,5	2	12,75	2			4	4	1	2	0	10		0,5		1		27,75
93	7,42	20	1	4	4	2	12,5	3	1	0	8,5	4	0,5	1	0	7		0	0	0		28
45	6,23	25	0	3	0	0	1,5	0,5	4		11	3	0,5	1,5	0,5	8	0,5	1	0	3		23,5
58	11,79	5	0	4	2	1	7	2	0	1	7,5	4	3,5	2	0,5	16	4	1	2	14		44,5
13	8,74	15	0	4	4	2	12	1			2	4	3		2	14		0,5	2	5		33
12	5,70	29	0	4	3,5	1	10	0,5		2	8	0,5	1	0,5	0	3,5	0			0		21,5
39	9,80	10	2	3	3	2	10,5	1,5	0	1	6,5	4	2	4	2	20	0	0	0	0		37
39	2,78	38	0	4	2	1	7	1			2	0,5	0,5			1,5	0		0	0		10,5
98	11,39	7	0	0	2	3,5	7,5	3		1	9,5	4	4	4	3	26				0		43
29	9,40	12	4	1	3,5	1	10,5	2			4	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5		2		35,5
23	5,03	31	0	4	0	2	4	1,5	0	0	3	0	2,5	2,5	0	10		0,5	0,5	2		19
73	6,82	22	0	2	4		9	2	0,5		5,25	0,5	1	3,5	1	11,5				0		25,75
81	2,85	37	0		1,5		3	0		1,5	5,25	0,5			0,5	1,5		0,5		1		10,75
27	5,83	28	0	2	4	2	11	0,5			1	2	0,5	0,5	2,5	9		0	0,5	1		22
64	6,56	23	2	0	2,5	3,5	9,5	0,5		0,5	2,75	0,5	1,5	1,5	0,5	7,5	0,5	1	1	5		24,75
41	10,73	9	4	3	3	2	11,5	2,5	0,5	0,5	8	4	2	4	2	20		0,5		1		40,5
98	9,60	11	4	4	3,5	2	13	1,5	0,5	0	4,25	4	2	4	1	18		0,5	0	1		36,25
83	2,91	36	0	0,5	2,5	1	6,25	0,5		0,5	2,75	0	0	0,5	0	1		0,5		1		11
47	12,85	4	0	4	2	2	8	2	2	3	19,5	4	3	1	0,5	13	4	0		8		48,5
22	15,70	3	2	2	4	4	14	4	2	3,5	25,25	4	2	3,5	2	19	0,5	0		1		59,25
84	7,62	19	4	3,5	3,5	1	11,75	0,5			1	4	1	3		12	0,5	1	0,5	4		28,75
90	11,66	6	4	0	2,5	1	8	3,5	1,5	1,5	16	4	4	3		18	0,5	0,5		2		44
17	3,44	35	0	0	1,5	0	3	1,5	0	1	6,5	0,5	1	0,5		3,5				0		13
87	9,27	14	4	2	3,5	1,5	11,5	4	2	1	16,5	3	1	0,5		6		0,5		1		35
65	9,34	13	2	3	4		10,5	1,5	1,5		6,75	4	1	3,5	2	17		0,5		1		35,25
15	8,68	16	0	1	4		8,5	1	0,5	0	3,25	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5	0	2		32,75
41	4,24	33	0	0	2	2	6	2			4	0	0	2	0,5	5			0,5	1		16
41	6,09	26		2	3,5	0	8	1,5			3	4	0,5	0,5		6	0,5	0,5	2	6		23
53	8,34	17	2	2	1,5	1	6	2	0,5	1,5	10,5	4	3	2		14		0,5		1		31,5
71	4,11	34	2	4	2	2	9	1	0	1	5,5		0,5			1				0		15,5
39	2,58	40	0	0	2	1	5	0,5		0,5	2,75			0,5	0,5	2				0		9,75
46	11,13	8	4	4	4	2	14	3,5	1	1	13	4	1,5	3		13	0,5	0,5		2		42
91	15,83	2	4	1	4	3,5	14	1	1	3,5	16,75	4	4	4	2,5	25		1	1	4		59,75
98	0,79	41	0	0	0	1	1	1			2					0				0		3
33	8,28	18	4	2	4	3,5	14,5	2,5	1	1,5	12,75	1	1			3	0,5			1		31,25
Moyenne	7,71						8,8780487				7,3658536					10,865853				2		29,109756
Médiane	7,35																					
Max	20,00																					
Min	0,79																					

Soit $n_0 \geqslant N$ et supposons $y_{n_0} \neq y$

notons $\varepsilon = \frac{1}{2} \| y_{n_0} - y \|$ alors puisque $n_0 \geqslant N$

on a $\| y_{n_0} - y \| \leq \varepsilon$ i.e $\| y_{n_0} - y \| \leq \frac{1}{2} \| y_{n_0} - y \|$ $\lightning$

EX 9 – Soit $\varepsilon > 0$

$(x_n) \to x$ alors $\exists N_1 \ \forall n \geqslant N_1 \ \| x_n - x \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

$(y_n) \to y$ $\exists N_2 \ \forall n \geqslant N_2 \ \| y_n - y \| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $N = \max(N_1, N_2)$ alors $\forall n \geqslant N$

$$\| x_n - y_n \| \leq \| x_n - x \| + \| x - y \| + \| y - y_n \|$$

$$\leq \varepsilon + \| x - y \|$$

et donc $\| x_n - y_n \| - \| x - y \| \leq \varepsilon$.

De même $\| x - y \| \leq \| x - x_n \| + \| x_n - y_n \| + \| y_n - y \|$

$$\leq \varepsilon + \| x_n - y_n \|$$

donc $\big| \| x_n - y_n \| - \| x - y \| \big| \leq \varepsilon$ □.

EX 11 – $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$

1) $\| f \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} | f(x) |$. est une norme

- $\| f \|_\infty = 0 \iff \sup_{x \in [0,1]} | f(x) | = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [0,1]$ $\Rightarrow f = 0$

  si $f = 0$ $\| f \|_\infty = 0$ évident

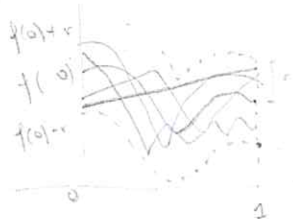
- $\| f + g \|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} | f(x) + g(x) | \leq \sup_{x \in [0,1]} | f(x) | + | g(x) |$

  $\leq \sup_{x \in [0,1]} | f(x) | + \sup_{x \in [0,1]} | g(x) | \leq \| f \|_\infty + \| g \|_\infty$

- $\| \lambda f \|_\infty = \sup | \lambda f(x) | = \sup | \lambda | | f(x) | = | \lambda | \sup | f(x) |$ $= | \lambda | \| f \|_\infty$.

2) $f \in E$, $r > 0$ $B(f, r) = \{ g \in E, \ \| f - g \|_\infty < r \}$

$= \{ g \in E, \ \sup_{x \in [0,1]} | f(x) - g(x) | < r \}$.



Numéro	Note/20	Rang	Partie I					Partie II				Partie III										
			1	2	3	4		1	2	3		1	2	3	4		1	2	3			Total
			0,5	0,5	2	1	16	2	2,5	3,5	32	1	2	2	2	28	2	2	2	24		100
88	6,36	24	2	0	3	2	9	0,5	0		1	4	2	3	0	14	0			0		24
42	20,00	1	4	4	4	2	14	4	4	3	28,5	4	4	4	2,5	25	0,5	3	0,5	8		75,5
11	5,10	30	0,5	0	2	1	5,25	1			2	4	2	0,5	1,5	12				0		19,25
90	5,03	31	0	2	2,5	0	6	1		1	5,5	0,5	2	0,5	0	5,5	0	0,5	0,5	2		19
30	6,03	27	4	0	4	2	12	1		0,5	3,75	4	1	0,5		7				0		22,75
76	2,78	38	0	1	2	2	6,5	0,5	0		1	0	0,5	0,5	0	2		0,5	0	1		10,5
85	7,35	21	4	3,5	3,5	2	12,75	2			4	4	1	2	0	10		0,5		1		27,75
93	7,42	20	1	4	4	2	12,5	3	1	0	8,5	4	0,5	1	0	7		0	0	0		28
45	6,23	25	0	3	0	0	1,5	0,5	4		11	3	0,5	1,5	0,5	8	0,5	1	0	3		23,5
58	11,79	5	0	4	2	1	7	2	0	1	7,5	4	3,5	2	0,5	16	4	1	2	14		44,5
13	8,74	15	0	4	4	2	12	1			2	4	3		2	14		0,5	2	5		33
12	5,70	29	0	4	3,5	1	10	0,5		2	8	0,5	1	0,5	0	3,5	0			0		21,5
39	9,80	10	2	3	3	2	10,5	1,5	0	1	6,5	4	2	4	2	20	0	0	0	0		37
39	2,78	38	0	4	2	1	7	1			2	0,5	0,5			1,5	0		0	0		10,5
98	11,39	7	0	0	2	3,5	7,5	3		1	9,5	4	4	4	3	26				0		43
29	9,40	12	4	1	3,5	1	10,5	2			4	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5		2		35,5
23	5,03	31	0	4	0	2	4	1,5	0	0	3	0	2,5	2,5	0	10		0,5	0,5	2		19
73	6,82	22	0	2	4		9	2	0,5		5,25	0,5	1	3,5	1	11,5				0		25,75
81	2,85	37	0		1,5		3	0		1,5	5,25	0,5			0,5	1,5		0,5		1		10,75
27	5,83	28	0	2	4	2	11	0,5			1	2	0,5	0,5	2,5	9		0	0,5	1		22
64	6,56	23	2	0	2,5	3,5	9,5	0,5		0,5	2,75	0,5	1,5	1,5	0,5	7,5	0,5	1	1	5		24,75
41	10,73	9	4	3	3	2	11,5	2,5	0,5	0,5	8	4	2	4	2	20		0,5		1		40,5
98	9,60	11	4	4	3,5	2	13	1,5	0,5	0	4,25	4	2	4	1	18		0,5	0	1		36,25
83	2,91	36	0	0,5	2,5	1	6,25	0,5		0,5	2,75	0	0	0,5	0	1		0,5		1		11
47	12,85	4	0	4	2	2	8	2	2	3	19,5	4	3	1	0,5	13	4	0		8		48,5
22	15,70	3	2	2	4	4	14	4	2	3,5	25,25	4	2	3,5	2	19	0,5	0		1		59,25
84	7,62	19	4	3,5	3,5	1	11,75	0,5			1	4	1	3		12	0,5	1	0,5	4		28,75
90	11,66	6	4	0	2,5	1	8	3,5	1,5	1,5	16	4	4	3		18	0,5	0,5		2		44
17	3,44	35	0	0	1,5	0	3	1,5	0	1	6,5	0,5	1	0,5		3,5				0		13
87	9,27	14	4	2	3,5	1,5	11,5	4	2	1	16,5	3	1	0,5		6		0,5		1		35
65	9,34	13	2	3	4		10,5	1,5	1,5		6,75	4	1	3,5	2	17		0,5		1		35,25
15	8,68	16	0	1	4		8,5	1	0,5	0	3,25	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5	0	2		32,75
41	4,24	33	0	0	2	2	6	2			4	0	0	2	0,5	5			0,5	1		16
41	6,09	26		2	3,5	0	8	1,5			3	4	0,5	0,5		6	0,5	0,5	2	6		23
53	8,34	17	2	2	1,5	1	6	2	0,5	1,5	10,5	4	3	2		14		0,5		1		31,5
71	4,11	34	2	4	2	2	9	1	0	1	5,5		0,5			1				0		15,5
39	2,58	40	0	0	2	1	5	0,5		0,5	2,75			0,5	0,5	2				0		9,75
46	11,13	8	4	4	4	2	14	3,5	1	1	13	4	1,5	3		13	0,5	0,5		2		42
91	15,83	2	4	1	4	3,5	14	1	1	3,5	16,75	4	4	4	2,5	25		1	1	4		59,75
98	0,79	41	0	0	0	1	1	1			2					0				0		3
33	8,28	18	4	2	4	3,5	14,5	2,5	1	1,5	12,75	1	1			3	0,5			1		31,25
Moyenne	7,71						8,8780487				7,3658536					10,865853				2		29,109756
Médiane	7,35																					
Max	20,00																					
Min	0,79																					

3. $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$

- $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow \int_0^1 |f(x)|\,dx = 0$

  $\Rightarrow |f(x)| = 0 \quad \forall x \in [0,1]$

  (faire dessin et sinon preuve avec ε, δ difficile)

- $\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,dx$

  $\leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)\,dx$

  $\leq \|f\|_1 + \|g\|_1$

- $\|\lambda f\|_1 \leq |\lambda| \, \|f\|_1$

4. On pose $\forall n \quad f_n(x) = x^n$

Supp $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ équivalents il existe donc $A, B > 0$.

tq $\forall n \quad A \|f_n\|_\infty \leq \|f_n\|_1 \leq B \|f_n\|_\infty$.

on calcule $\|f_n\|_\infty = 1 \quad \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ d'où

$\forall n, \quad A \leq \frac{1}{n+1} \leq B$ mais si $n \to \infty$ $\frac{1}{n+1} \to 0$

ce qui est absurde.

Ex 12 $\quad \|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \qquad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$

1) Même démo que $\| \|_1$ et $\| \|_\infty$ dans $\mathbb{R}^{n+1}$

2) Problème : si on regardait plutôt $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ elles sont équivalentes

$\|P\|_\infty \leq \|P\|_1 \leq (n+1) \|P\|_\infty$

mais n dépend du polynôme P.

Contre-exemple : on considère $P_n(X) = 1 + X + \ldots + X^n$

$\|P_n\|_1 = n+1 \qquad \|P_n\|_\infty = 1$.

Si équiv $\exists A, B > 0$ tq $\forall n$.

$A \|P_n\|_\infty \leq \|P_n\|_1 \leq B \|P_n\|_\infty$

i.e $\quad A \leq n+1 \leq B \qquad$ mais si $n \to \infty$ impossible

Numéro	Note/20	Rang	Partie I					Partie II				Partie III										
			1	2	3	4		1	2	3		1	2	3	4		1	2	3			Total
			0,5	0,5	2	1	16	2	2,5	3,5	32	1	2	2	2	28	2	2	2	24		100
88	6,36	24	2	0	3	2	9	0,5	0		1	4	2	3	0	14	0			0		24
42	20,00	1	4	4	4	2	14	4	4	3	28,5	4	4	4	2,5	25	0,5	3	0,5	8		75,5
11	5,10	30	0,5	0	2	1	5,25	1			2	4	2	0,5	1,5	12				0		19,25
90	5,03	31	0	2	2,5	0	6	1		1	5,5	0,5	2	0,5	0	5,5	0	0,5	0,5	2		19
30	6,03	27	4	0	4	2	12	1		0,5	3,75	4	1	0,5		7				0		22,75
76	2,78	38	0	1	2	2	6,5	0,5	0		1	0	0,5	0,5	0	2		0,5	0	1		10,5
85	7,35	21	4	3,5	3,5	2	12,75	2			4	4	1	2	0	10		0,5		1		27,75
93	7,42	20	1	4	4	2	12,5	3	1	0	8,5	4	0,5	1	0	7		0	0	0		28
45	6,23	25	0	3	0	0	1,5	0,5	4		11	3	0,5	1,5	0,5	8	0,5	1	0	3		23,5
58	11,79	5	0	4	2	1	7	2	0	1	7,5	4	3,5	2	0,5	16	4	1	2	14		44,5
13	8,74	15	0	4	4	2	12	1			2	4	3		2	14		0,5	2	5		33
12	5,70	29	0	4	3,5	1	10	0,5		2	8	0,5	1	0,5	0	3,5	0			0		21,5
39	9,80	10	2	3	3	2	10,5	1,5	0	1	6,5	4	2	4	2	20	0	0	0	0		37
39	2,78	38	0	4	2	1	7	1			2	0,5	0,5			1,5	0		0	0		10,5
98	11,39	7	0	0	2	3,5	7,5	3		1	9,5	4	4	4	3	26				0		43
29	9,40	12	4	1	3,5	1	10,5	2			4	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5		2		35,5
23	5,03	31	0	4	0	2	4	1,5	0	0	3	0	2,5	2,5	0	10		0,5	0,5	2		19
73	6,82	22	0	2	4		9	2	0,5		5,25	0,5	1	3,5	1	11,5				0		25,75
81	2,85	37	0		1,5		3	0		1,5	5,25	0,5			0,5	1,5		0,5		1		10,75
27	5,83	28	0	2	4	2	11	0,5			1	2	0,5	0,5	2,5	9		0	0,5	1		22
64	6,56	23	2	0	2,5	3,5	9,5	0,5		0,5	2,75	0,5	1,5	1,5	0,5	7,5	0,5	1	1	5		24,75
41	10,73	9	4	3	3	2	11,5	2,5	0,5	0,5	8	4	2	4	2	20		0,5		1		40,5
98	9,60	11	4	4	3,5	2	13	1,5	0,5	0	4,25	4	2	4	1	18		0,5	0	1		36,25
83	2,91	36	0	0,5	2,5	1	6,25	0,5		0,5	2,75	0	0	0,5	0	1		0,5		1		11
47	12,85	4	0	4	2	2	8	2	2	3	19,5	4	3	1	0,5	13	4	0		8		48,5
22	15,70	3	2	2	4	4	14	4	2	3,5	25,25	4	2	3,5	2	19	0,5	0		1		59,25
84	7,62	19	4	3,5	3,5	1	11,75	0,5			1	4	1	3		12	0,5	1	0,5	4		28,75
90	11,66	6	4	0	2,5	1	8	3,5	1,5	1,5	16	4	4	3		18	0,5	0,5		2		44
17	3,44	35	0	0	1,5	0	3	1,5	0	1	6,5	0,5	1	0,5		3,5				0		13
87	9,27	14	4	2	3,5	1,5	11,5	4	2	1	16,5	3	1	0,5		6		0,5		1		35
65	9,34	13	2	3	4		10,5	1,5	1,5		6,75	4	1	3,5	2	17		0,5		1		35,25
15	8,68	16	0	1	4		8,5	1	0,5	0	3,25	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5	0	2		32,75
41	4,24	33	0	0	2	2	6	2			4	0	0	2	0,5	5			0,5	1		16
41	6,09	26		2	3,5	0	8	1,5			3	4	0,5	0,5		6	0,5	0,5	2	6		23
53	8,34	17	2	2	1,5	1	6	2	0,5	1,5	10,5	4	3	2		14		0,5		1		31,5
71	4,11	34	2	4	2	2	9	1	0	1	5,5		0,5			1				0		15,5
39	2,58	40	0	0	2	1	5	0,5		0,5	2,75			0,5	0,5	2				0		9,75
46	11,13	8	4	4	4	2	14	3,5	1	1	13	4	1,5	3		13	0,5	0,5		2		42
91	15,83	2	4	1	4	3,5	14	1	1	3,5	16,75	4	4	4	2,5	25		1	1	4		59,75
98	0,79	41	0	0	0	1	1	1			2					0				0		3
33	8,28	18	4	2	4	3,5	14,5	2,5	1	1,5	12,75	1	1			3	0,5			1		31,25
Moyenne	7,71						8,8780487				7,3658536					10,865853				2		29,109756
Médiane	7,35																					
Max	20,00																					
Min	0,79																					

EX 14 1) Ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^2$

a) $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ pas ouvert suite $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1} \to (0,0) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
et aucun élément de la suite appartient à $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ est fermé car toute suite $(x_n,y_n) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ tq convergente vers (x,y) alors $(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$
(en fait toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{Z}$ convergente est constante à partir d'un certain rang.

b) $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$ pas ouvert par exemple toute boule centrée en $(0,0)$ contient des irrationnels
Pas fermé suite $u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+u_n}$ suite rationnels
et limite est $\sqrt{2}$. (fract. continue)

c) $\{(x,x^2),\ x\in\mathbb{R}\} = E$ pas ouvert, boule centrée en $(0,0)$
$\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \to (0,0) \in E$ mais $\forall\ n\geq 1$ $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right) \notin E$
· E est fermé soit $(x_n,y_n) \in E$ tq $(x_n,y_n) \to (x,y)$
alors $x_n \to x$, $y_n \to y$ on déduit la suite
$x_n^2 - y_n \to x^2 - y$. mais $x_n^2 - y_n = 0$ donc $x^2 - y = 0$.

d) $E = \left\{\left(\frac{1}{n},0\right),\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ pas ouvert la suite
$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}},0\right) \to \left(\frac{1}{2},0\right) \in E$ mais $\nexists N$ tq $\forall n\geq N$ $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{n}},0\right) \in E$
E non fermé car suite $\left(\frac{1}{n},0\right) \to (0,0) \notin E$.

2) $A = \left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right),\ x>0\right\}$ ~~pour x~~
· Pas ouvert par exemple suite $\left(x_0-\frac{1}{n},\ \sin\frac{1}{x_0}-\frac{1}{n}\right) \to \left(x_0,\sin\frac{1}{x_0}\right)$
$x_0>0$. mais pas contenue dans cet ensemble à partir d'un certain rang
· Pas fermé la suite $\left(\frac{1}{n\pi},\sin(n\pi)\right)_{n\geq 1} \in A$
$= \left(\frac{1}{n\pi},0\right)$.
et converge vers $(0,0)$. mais $(0,0)\notin A$.

Numéro	Note/20	Rang	Partie I					Partie II				Partie III										
			1	2	3	4		1	2	3		1	2	3	4		1	2	3			Total
			0,5	0,5	2	1	16	2	2,5	3,5	32	1	2	2	2	28	2	2	2	24		100
88	6,36	24	2	0	3	2	9	0,5	0		1	4	2	3	0	14	0			0		24
42	20,00	1	4	4	4	2	14	4	4	3	28,5	4	4	4	2,5	25	0,5	3	0,5	8		75,5
11	5,10	30	0,5	0	2	1	5,25	1			2	4	2	0,5	1,5	12				0		19,25
90	5,03	31	0	2	2,5	0	6	1		1	5,5	0,5	2	0,5	0	5,5	0	0,5	0,5	2		19
30	6,03	27	4	0	4	2	12	1		0,5	3,75	4	1	0,5		7				0		22,75
76	2,78	38	0	1	2	2	6,5	0,5	0		1	0	0,5	0,5	0	2		0,5	0	1		10,5
85	7,35	21	4	3,5	3,5	2	12,75	2			4	4	1	2	0	10		0,5		1		27,75
93	7,42	20	1	4	4	2	12,5	3	1	0	8,5	4	0,5	1	0	7		0	0	0		28
45	6,23	25	0	3	0	0	1,5	0,5	4		11	3	0,5	1,5	0,5	8	0,5	1	0	3		23,5
58	11,79	5	0	4	2	1	7	2	0	1	7,5	4	3,5	2	0,5	16	4	1	2	14		44,5
13	8,74	15	0	4	4	2	12	1			2	4	3		2	14		0,5	2	5		33
12	5,70	29	0	4	3,5	1	10	0,5		2	8	0,5	1	0,5	0	3,5	0			0		21,5
39	9,80	10	2	3	3	2	10,5	1,5	0	1	6,5	4	2	4	2	20	0	0	0	0		37
39	2,78	38	0	4	2	1	7	1			2	0,5	0,5			1,5	0		0	0		10,5
98	11,39	7	0	0	2	3,5	7,5	3		1	9,5	4	4	4	3	26				0		43
29	9,40	12	4	1	3,5	1	10,5	2			4	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5		2		35,5
23	5,03	31	0	4	0	2	4	1,5	0	0	3	0	2,5	2,5	0	10		0,5	0,5	2		19
73	6,82	22	0	2	4		9	2	0,5		5,25	0,5	1	3,5	1	11,5				0		25,75
81	2,85	37	0		1,5		3	0		1,5	5,25	0,5			0,5	1,5		0,5		1		10,75
27	5,83	28	0	2	4	2	11	0,5			1	2	0,5	0,5	2,5	9		0	0,5	1		22
64	6,56	23	2	0	2,5	3,5	9,5	0,5		0,5	2,75	0,5	1,5	1,5	0,5	7,5	0,5	1	1	5		24,75
41	10,73	9	4	3	3	2	11,5	2,5	0,5	0,5	8	4	2	4	2	20		0,5		1		40,5
98	9,60	11	4	4	3,5	2	13	1,5	0,5	0	4,25	4	2	4	1	18		0,5	0	1		36,25
83	2,91	36	0	0,5	2,5	1	6,25	0,5		0,5	2,75	0	0	0,5	0	1		0,5		1		11
47	12,85	4	0	4	2	2	8	2	2	3	19,5	4	3	1	0,5	13	4	0		8		48,5
22	15,70	3	2	2	4	4	14	4	2	3,5	25,25	4	2	3,5	2	19	0,5	0		1		59,25
84	7,62	19	4	3,5	3,5	1	11,75	0,5			1	4	1	3		12	0,5	1	0,5	4		28,75
90	11,66	6	4	0	2,5	1	8	3,5	1,5	1,5	16	4	4	3		18	0,5	0,5		2		44
17	3,44	35	0	0	1,5	0	3	1,5	0	1	6,5	0,5	1	0,5		3,5				0		13
87	9,27	14	4	2	3,5	1,5	11,5	4	2	1	16,5	3	1	0,5		6		0,5		1		35
65	9,34	13	2	3	4		10,5	1,5	1,5		6,75	4	1	3,5	2	17		0,5		1		35,25
15	8,68	16	0	1	4		8,5	1	0,5	0	3,25	4	3	4	0,5	19	0,5	0,5	0	2		32,75
41	4,24	33	0	0	2	2	6	2			4	0	0	2	0,5	5			0,5	1		16
41	6,09	26		2	3,5	0	8	1,5			3	4	0,5	0,5		6	0,5	0,5	2	6		23
53	8,34	17	2	2	1,5	1	6	2	0,5	1,5	10,5	4	3	2		14		0,5		1		31,5
71	4,11	34	2	4	2	2	9	1	0	1	5,5		0,5			1				0		15,5
39	2,58	40	0	0	2	1	5	0,5		0,5	2,75			0,5	0,5	2				0		9,75
46	11,13	8	4	4	4	2	14	3,5	1	1	13	4	1,5	3		13	0,5	0,5		2		42
91	15,83	2	4	1	4	3,5	14	1	1	3,5	16,75	4	4	4	2,5	25		1	1	4		59,75
98	0,79	41	0	0	0	1	1	1			2					0				0		3
33	8,28	18	4	2	4	3,5	14,5	2,5	1	1,5	12,75	1	1			3	0,5			1		31,25
Moyenne	7,71						8,8780487				7,3658536					10,865853				2		29,109756
Médiane	7,35																					
Max	20,00																					
Min	0,79																					

EX 17 1) $\overline{[0,1]\cap\mathbb{Q}} = [0,1]$, $\overset{\circ}{\overbrace{[0,1]\cap\mathbb{Q}}} = \emptyset$

2) $(\mathbb{R}, |\ |)$

$A = [0,1[\cup]1,2] \cup \{3\} \cup ([4,5]\cap\mathbb{Q})$

$\bar{A} = [0,2] \cup \{3\} \cup [4,5]$

$\mathring{A} =]0,1[\cup]1,2[$

$\overset{\circ}{\bar{A}} =]0,2[\cup]4,5[$

$\overline{\mathring{A}} = [0,2]$

$\overline{\overset{\circ}{\bar{A}}} = [0,2] \cup [4,5]$

$\overset{\circ}{\overline{\mathring{A}}} =]0,2[$

EX 16 1) • $f \in A \overset{\text{fait:}}{} \exists m>0$ tq $\forall x \in [0,1]$ $f(x) > m$ en effet

comme f continue $f([0,1])$ est un segment $[m,M] \subseteq \mathbb{R}_+^*$

$0 < m \leq f(x) \leq M$.

Soit f_n suite de E qui converge vers f (pour $\| \ \|_\infty$)

dessin

donc on pose $\varepsilon = \frac{m}{2}$ alors $\exists N \ \forall n \geq N$

$B(f,\frac{m}{2})$ $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$ i.e $\sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{m}{2}$

on a donc $\forall x \in [0,1]$ $|f_n(x)-f(x)| \leq \frac{m}{2}$

et ceci équivaut $\underbrace{-\frac{m}{2}+f(x)}_{\geq \frac{m}{2}} \leq f_n(x) \leq \frac{m}{2}+f(x)$

d'où $\forall x \in [0,1]$ $f_n(x) > 0$.

donc $\forall n \geq N$ $f_n \in A$ et A est donc ouvert.

• A n'est pas ouvert pour $\| \ \|_1$. par exemple on prend

$f = 1$ $f_n(x) = \begin{cases} -1+2nx & x \in [0,\frac{1}{n}] \\ 1 & x \in [1/n, 1] \end{cases}$

on calcule $\|f-f_n\|_1 \to 0$ mais $f_n \not> 0$ pour aucune valeur de n.

2) Si $f \in E\setminus B$ alors $f>0$ ou $f<0$ (car continue et th. val. interm).
et on utilise a) pour montrer $E\setminus B$ ouvert donc B fermé.

Ex 19 $a, b \in \overline{F}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$(a_n) \in F \to a$ donc $(a_n + b_n) \in F \to a+b$

$(b_n) \in F \to b$

d'où $a+b \in \overline{F}$.   De m $(\lambda a_n) \in F \to \lambda a \Rightarrow \lambda a \in \overline{F}$

Ex 18   1) $\boxed{\overline{B(x,r)} = \overline{B}(x,r)}$

. $B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r) \Rightarrow \overline{B(x,r)} \subseteq \overline{\overline{B}(x,r)} = \overline{B}(x,r)$

. Réciproquement, Soit $u \in \overline{B}(x,r)$, $\|u-x\| \leq r$

si $\|u-x\| < r$ alors $u \in B(x,r)$ et donc $u \in \overline{B(x,r)}$.

si $\|u-x\| = r$ soit V une boule ~~ou contenant~~ de centre u, rayon ε

Soit $\rho \in \mathbb{R}$ tq $0 < \rho < \min(r, \varepsilon)$ alors

$\overline{B}(x,\rho) \subset B(x,\varepsilon)$ et on pose $v = u + \frac{\rho}{r}(x-u)$

alors $\|v-u\| = \frac{\rho}{r}\|x-u\| = \frac{\rho}{r} r = \rho < \varepsilon$

et $\|x-v\| = \|x-u-\frac{\rho}{r}(x-u)\| = \|(1-\frac{\rho}{r})(x-u)\|$

$= (1-\frac{\rho}{r})\|x-u\| = (1-\frac{\rho}{r})r = r-\rho < r$

~~et donc $\neq \varepsilon$~~ ρ et donc

il en résulte $v \in B(u,\varepsilon) \cap B(x,r)$ ~~et donc~~

$u \in \overline{B(x,r)}$.

2) $\boxed{\overset{\circ}{\widetilde{\overline{B}(x,r)}} = B(x,r)}$

. $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r) \Rightarrow \overset{\circ}{\widetilde{B(x,r)}} \subset \overset{\circ}{\widetilde{\overline{B}(x,r)}}$.

$\overset{\circ}{\widetilde{B(x,r)}} = B(x,r)$

. Réciproquement soit $u \in \overset{\circ}{\widetilde{\overline{B}(x,r)}}$. $\exists\, B(u,\varepsilon)$ tq $B(u,\varepsilon) \subset \overset{\circ}{\widetilde{\overline{B}(x,r)}}$

. Si $u = x$ $u \in B(x,r)$

. Si $u \neq x$ soit $\rho \in \mathbb{R}$ $0 < \rho < \varepsilon$. On pose $v = u + \frac{\rho}{\|u-x\|}(u-x)$

alors $\|v-u\| = \frac{\rho}{\|u-x\|}(u-x) = \rho < \varepsilon$ donc $v \in \overline{B}(u,\rho) \subset B(u,\varepsilon) \subset \overline{B}(x$

donc $\|v-x\| \leq r$.

D'autre part $\|v-x\| = \|u + \frac{\rho}{\|u-x\|}(u-x)\| = \|(1+\frac{\rho}{\|u-x\|})(u-x)\|$

$= (1+\frac{\rho}{\|u-x\|})\|u-x\| > \|u-x\|$

d'où $\|u-x\| < \|v-x\| \leq r$ et donc $u \in B(x,r)$