L3 : Mathématiques et Economie **5 janvier 2022**
2021–2022

EXAMEN : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 2 heures

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits.
Attention : une réponse correcte sans justification elle aussi correcte ne donnera lieu à aucune attribution de point.
LE SUJET EST RECTO-VERSO !

Donner les définitions :

1. d'un majorant essentiel,
2. d'un espace de Banach,
3. d'une base hilbertienne.

Donner les formulations :

1. de l'inégalité de Minkowski,
2. de l'inégalité de Hölder,
3. du théorème de Riesz-Fischer.

Exercice 1 On considère la fonction polynomiale

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1. \end{aligned}$$

1. Est-ce que f est une fonction (a) convexe, (b) strictement convexe ou (c) ni convexe ni strictement convexe ?
2. Soit $D_1 = [0, 2]^2$ et $g_1 : D_1 \to \mathbb{R}$ la restriction de f sur D_1, c.à.d. $g_1(x, y) = f(x, y)$ pour tous $(x, y) \in D_1$.
   (a) Montrer que g_1 admet un minimum.
   (b) Déterminer le minimum de g_1 ainsi que le ou les point(s) $(x, y) \in D_1$ pour le(s)quel(s) ce minimum est atteint.
3. Soit $D_2 = [2, 3] \times [0, 1]$ et g_2 la restriction de f sur D_2. Trouver les points (s'ils existent) où g_2 atteint son minimum.

Exercice 2 Dans cet exercice $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{R}$ sont munis de leurs tribus boréliènnes et μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ telle que $\mu(\mathbb{R}_+) = 1$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \cos(xt)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ la fonction $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, t \mapsto f(x,t)$, est :
   (a) boréliènne, et
   (b) μ-intégrable.

   On pose alors pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} f(x,t) d\mu(t)$.
2. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. On suppose que la fonction $t \mapsto t^2$ est μ-intégrable sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \mu)$.
   Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{1 - F(x)}{x^2}$ en fonction de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} t^2 d\mu(t)$.

   <u>Indications :</u> On sait bien, et il est permis d'utiliser sans preuve, que $1 - \cos(u) \leq \dfrac{u^2}{2}$ *et* $\displaystyle\lim_{u \to 0^+} \frac{1 - \cos(u)}{u^2} = \frac{1}{2}$. *Se rappeler aussi du théorème de convergence dominée.*

Exercice 3 Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \in L^2(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

1. Est-ce que $f \in L^1(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ si
   (a) $\mu(\Omega) < +\infty$?
   (b) $\mu(\Omega) = +\infty$?
2. Supposons que $\mu(\Omega) = 1$.
   (a) Soit $g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x)$. Montrer que $g \in L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.
   (b) Montrer que la fonction définie par $\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}, (x,y) \mapsto f(x) - f(y)$, appartient à $L^2(\Omega \times \Omega, \mathcal{T} \otimes \mathcal{T}, \mu \otimes \mu)$.
   (c) Démontrer l'égalité suivante en précisant le théorème principal utilisé dans votre preuve :

$$\int_{\Omega \times \Omega} [f(x) - f(y)]^2 \, d(\mu \otimes \mu)(x,y) = 2 \int_\Omega f^2 d\mu - 2 \left(\int_\Omega f d\mu \right)^2.$$