Examen- Jeudi 11 janvier 2017

Durée 3h.

Les documents et les téléphones portables sont interdits. Une attention particulière sera portée à la rédaction lors de la correction. Le sujet comporte 3 exercices indépendants.

Exercice 1.

1. Pour cette question, on se place dans un espace métrique (X, d). Soit un réel $\varepsilon_0 > 0$ et une partie Y de X telle que pour tout couple (a, b) de points distincts de Y, on ait $d(a, b) \geq \varepsilon_0$.
   (a) Soit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y qui converge vers $x \in X$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $y_n = x$.
   (b) En déduire que Y est un fermé de X.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire possédant une famille orthonormale $(e_k)_{k>0}$. On considère $F = \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \colon k > 0 \right\}$.
   (a) Montrer en utilisant la première question que F est fermé.
   (b) Montrer que $d(0_E, F) = 1$.
   (c) En déduire que 0_E n'a pas de projection sur F.

3. On se place dans l'espace de Hilbert $L^2([0, 1])$. On rappelle la formule trigonométrique suivante :
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b)) .$$
   (a) On considère la famille $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x)$ pour tout $x \in [0, 1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthonormale.
   (b) En déduire un exemple d'une partie fermée G de $L^2([0, 1])$ telle que l'application nulle n'a pas de projection sur G.

Exercice 2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto e^{-xy^2} \sin x \end{aligned}$$

et la famille de fonctions $g_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_a(y) = \dfrac{1}{1+y^4}\Big(1 - e^{-ay^2}(\cos a + y^2 \sin a)\Big)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$.

1. On fixe un réel $a > 0$.
   (a) Montrer que
   $$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} |f(x,y)| dxdy \leq \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ay^2}}{y^2} \, dy.$$
   (Pour cette question, il est demandé de citer explicitement le théorème utilisé. Il en est de même pour la suite.)
   (b) En déduire que la fonction f est intégrable sur $[0, a] \times \mathbb{R}_+$.
   (c) Montrer que
   $$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y) dxdy = \left(\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx\right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du\right).$$
   (d) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,
   $$\int_0^a e^{-xy^2} \sin x dx = g_a(y).$$
   (Indication : on pourra calculer $\displaystyle\int_0^a e^{x(i-y^2)} dx$ ou faire deux intégrations par partie.)
   (e) En utilisant le fait que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire que
   $$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g_a(y) dy.$$
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$. Montrer que la suite $\left(\displaystyle\int_0^{+\infty} g_{a_n}(y) dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4} \, dy$.
3. En déduire que l'intégrale impropre de Riemann $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \, dx$ est semi-convergente.
4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \dfrac{2t+1}{2t^2 + 2t + 1} + \dfrac{2}{(2t+1)^2 + 1}$ pour $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t) + h(-t) = \dfrac{4}{4t^4 + 1}$.
   (b) En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{4}{4t^4+1}$ a pour primitive la fonction
   $$t \mapsto \frac{1}{2} \ln\left(\frac{2t^2 + 2t + 1}{2t^2 - 2t + 1}\right) + \arctan(1 + 2t) - \arctan(1 - 2t).$$

(c) Vérifier alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{4t^4+1}\,dt = \pi$.

5. Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

6. (Question Bonus) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

Exercice 3. 1. Rappeler la définition d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$.

2. Le but de cette question est de montrer de manière élémentaire le cas particulier suivant de l'inégalité Jensen : soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 1$, des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, et une fonction convexe f sur I. Alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ on a
$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i)\ .$$
   (a) Vérifier l'inégalité pour $n = 1$ et $n = 2$.
   (b) On suppose l'inégalité vérifiée pour un entier $n \geq 2$ fixé. On considère $n+1$ réels $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ de l'intervalle I, et $n+1$ réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$
      i. On pose $b = \dfrac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Vérifier que $b \in I$, puis que
$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) f(b) + \alpha_{n+1} f(a_{n+1}).$$
      ii. En déduire que
$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(a_i).$$
   (c) Conclure.

3. Vérifier que la fonction $g : x \to \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. En déduire que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, on a
$$\ln\left(1 + \left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n (1+e^{x_i})\right)^{1/n}\right).$$

5. Établir que pour tous $y_1, \ldots, y_n \in]0,+\infty[$,
$$1 + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1+y_i)\right)^{1/n}.$$

6. En déduire que pour tous $a_1, \ldots, a_n \in]0,+\infty[$ et tous $b_1, \ldots, b_n \in]0,+\infty[$, on a
$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (a_i+b_i)\right)^{1/n}.$$