Examen- Jeudi 11 janvier 2017-corrigé

Exercice 1. 1. Pour cette question, on se place dans un espace métrique (X,d). Soit un réel $\varepsilon_0 > 0$ et une partie Y de X telle que pour tout couple (a,b) de points distincts de Y, on ait $d(a,b) \geq \varepsilon_0$.

(a) Soit une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y qui converge vers $x \in X$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $y_n = x$.

Comme $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, il existe une entier $n_0 > 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $d(y_n, x) < \varepsilon_0/2$. Alors, pour tous $n \geq n_0$ et $n' \geq n_0$, on a

$$d(y_n, y_{n'}) \leq d(y_n, x) + d(x, y_{n'}) < \varepsilon_0.$$

Par la propriété de Y ci-dessus, on en déduit que pour tous $n \geq n_0$ et $n' \geq n_0$, $y_n = y_{n'}$. Ainsi, $(y_n)_{n\geq n_0}$ est constante et comme elle converge vers x, on a pour tout $n \geq n_0$, $y_n = x$.

(b) En déduire que Y est un fermé de X.

D'après la question précédente, si une suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y converge vers $x \in X$, alors il existe un entier n_0 tel que $x = y_{n_0}$ et en particulier $x \in Y$. Ainsi, Y est fermé.

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire possédant une famille orthonormale $(e_k)_{k>0}$. On considère $F = \left\{ \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \colon k > 0 \right\}$.

(a) Montrer en utilisant la première question que F est fermé.

Soit k, k' deux entiers strictement positifs distincts. Comme e_k et $e_{k'}$ sont deux vecteurs de normes 1 orthogonaux, on a

$$\begin{aligned} \left\| \left(1+\frac{1}{k}\right) e_k - \left(1+\frac{1}{k'}\right) e_{k'} \right\|^2 &= \left\langle \left(1+\frac{1}{k}\right) e_k - \left(1+\frac{1}{k'}\right) e_{k'}, \left(1+\frac{1}{k}\right) e_k - \left(1+\frac{1}{k'}\right) e_{k'} \right\rangle \\ &= \left\| \left(1+\frac{1}{k}\right) e_k \right\|^2 + \left\| \left(1+\frac{1}{k'}\right) e_{k'} \right\|^2 \\ &= \left(1+\frac{1}{k}\right)^2 + \left(1+\frac{1}{k'}\right)^2 \geq 2 \end{aligned}$$

Ainsi, F satisfait la propriété de la première question avec $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$.

(b) Montrer que $d(0_E, F) = 1$.

Pour tout $k > 0$, $d\left(0_E, \left(1+\frac{1}{k}\right) e_k\right) = 1 + \frac{1}{k} > 1$ et comme $1 + \frac{1}{k}$ tend vers 1 quand k tend vers l'infini, on en déduit que $d(0_E, F) = 1$.

(c) En déduire que 0_E n'a pas de projection sur F.

D'après ce qui précède la distance de 0_E à F n'est pas atteinte donc 0_E n'a pas de projection sur F.

3. On se place dans l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$. On rappelle la formule trigonométrique suivante :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \ \ \cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

(a) On considère la famille $(u_k)_{k\geq 1}$ définie par $u_k(x) = \sqrt{2}\cos(k\pi x)$ pour tout $x \in [0,1]$ et tout $k \geq 1$. Montrer que c'est une famille orthonormale.

Soit k, k' deux entiers strictement positifs distincts.

$$\|u_k\|_2^2 = \int_0^1 |u_k(x)|^2 dx = \int_0^1 2\cos^2(k\pi x)dx = \int_0^1 (\cos(2k\pi x)+1)dx = 1, \text{ et}$$

$$\begin{aligned}\langle u_k, u_{k'}\rangle &= \int_0^1 2\cos(k\pi x)\cos(k'\pi x)dx = \int_0^1 (\cos((k+k')\pi x) + \cos((k-k')\pi x)dx \\ &= \left[\frac{1}{(k+k')\pi}\sin((k+k')\pi x) + \frac{1}{(k-k')\pi}\sin((k-k')\pi x\right]_0^1 = 0.\end{aligned}$$

(b) En déduire un exemple d'une partie fermée G de $L^2([0,1])$ telle que l'application nulle n'a pas de projection sur G.

Il suffit de considérer l'ensemble $G = \left\{\left(1+\frac{1}{k}\right)u_k : k > 0\right\}$. D'après la question 2, l'application nulle, c.à.d. le vecteur nul de $L^2([0,1])$, n'a pas de projection sur G.

Exercice 2. On considère la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto e^{-xy^2}\sin x \end{aligned}$$

et la famille de fonctions $g_a : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $g_a(y) = \dfrac{1}{1+y^4}\left(1 - e^{-ay^2}(\cos a + y^2 \sin a)\right)$ pour $a \in \mathbb{R}_+$ et $y \in \mathbb{R}_+$.

1. On fixe un réel $a > 0$.

(a) Montrer que

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} |f(x,y)|dxdy \leq \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}\, dy.$$

(Pour cette question, il est demandé de citer explicitement le théorème utilisé. Il en est de même pour la suite.)

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} |f(x,y)|dxdy = \int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} e^{-xy^2}|\sin x|dxdy \leq \int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} e^{-xy^2}dxdy.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli appliqué à la fonction positive $(x,y) \mapsto e^{-xy^2}$, on a

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} e^{-xy^2}dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy^2}dx\right)dy = \int_0^{+\infty}\left[\frac{-e^{-xy^2}}{y^2}\right]_{x=0}^a dy = \int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-ay^2}}{y^2}\,dy,$$

ce qui permet de conclure.

(b) En déduire que la fonction f est intégrable sur $[0,a]\times\mathbb{R}_+$.

$y \mapsto \dfrac{1-e^{-ay^2}}{y^2}$ *est positive et continue sur $]0,+\infty[$.*

En $y = +\infty$, $\dfrac{1-e^{-ay^2}}{y^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{y^2}$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$.

En $y = 0$, $\dfrac{1-e^{-ay^2}}{y^2} = \dfrac{ay^2+o(y^2)}{y^2} \xrightarrow[y\to 0]{} a$.

La fonction $y \mapsto \dfrac{1-e^{-ay^2}}{y^2}$ est donc intégrable sur $]0,+\infty[$ et par la question précédente, on en déduit que f est intégrable sur $[0,a]\times\mathbb{R}_+$.

(c) Montrer que

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy = \left(\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right).$$

Comme f est intégrable sur $[0,a]\times\mathbb{R}_+$, on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy = \int_0^a \left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}\sin x dy\right) dx = \int_0^a \sin x\left(\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dy\right) dx.$$

Pour x fixé strictement positif, le changement de variable $u = y\sqrt{x}$ donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2}dy = \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du, \text{ d'où}$$

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy = \int_0^a \sin x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right) dx = \left(\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right).$$

(d) Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx = g_a(y).$$

(Indication : on pourra calculer $\int_0^a e^{x(i-y^2)}dx$ ou faire deux intégrations par partie.)

Soit $y \in \mathbb{R}_+$. L'intégrale $\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx$ est la partie imaginaire de $\int_0^a e^{x(i-y^2)}dx$. Or,

$$\int_0^a e^{x(i-y^2)}dx = \left[\frac{e^{x(i-y^2)}}{(i-y^2)}\right]_{x=0}^a = \frac{e^{a(i-y^2)}-1}{(i-y^2)} = \frac{e^{a(i-y^2)}-1}{(i-y^2)} = \frac{(1-e^{a(i-y^2)})(y^2+i)}{(1+y^4)}.$$

D'où,

$$\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx = \frac{1-e^{-ay^2}((\sin a)y^2+\cos a)}{(1+y^4)} = g_a(y).$$

(e) En utilisant le fait que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, en déduire que

$$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g_a(y)dy.$$

D'après la question (c), on a

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy = \left(\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx\right)\left(\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx.$$

À nouveau par Fubini et par la question précédente, on a

$$\int_{[0,a]\times\mathbb{R}_+} f(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty}\left(\int_0^a e^{-xy^2}\sin x dx\right) dy = \int_0^{+\infty} g_a(y)dy.$$

Ainsi,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} g_a(y)dy.$$

2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ tendant vers $+\infty$. Montrer que la suite $\left(\int_0^{+\infty} g_{a_n}(y)dy\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction g_{a_n} est continue sur $[0,+\infty[$ et donc borélienne.

Pour tout $y \in [0,+\infty[$, on a $g_{a_n}(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+y^4}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|g_{a_n}(y)| \leq \frac{1}{1+y^4}\left(1+e^{-ay^2}(|\cos a| + y^2|\sin a|)\right) \leq \frac{2+y^2}{1+y^4}.$$

Or, $y \mapsto \frac{2+y^2}{1+y^4}$ et intégrable sur $[0,+\infty[$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée ce qui donne le résultat.

3. En déduire que l'intégrale impropre de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ est semi-convergente.

D'après les deux questions précédentes,

$$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy.$$

Ainsi, l'intégrale impropre de Riemann $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$ est semi-convergente et vaut $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\, dy$.

4. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \frac{2t+1}{2t^2+2t+1} + \frac{2}{(2t+1)^2+1}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $h(t) + h(-t) = \frac{4}{4t^4+1}$.

   Soit $t \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
h(t)+h(-t) &= \frac{2t+1}{2t^2+2t+1} + \frac{2}{(2t+1)^2+1} + \frac{-2t+1}{2t^2-2t+1} + \frac{2}{(-2t+1)^2+1} \\
&= \frac{2t+1}{2t^2+2t+1} + \frac{-2t+1}{2t^2-2t+1} + \frac{2}{(2t+1)^2+1} + \frac{2}{(-2t+1)^2+1}.
\end{aligned}$$

   Or,

$$\begin{aligned}
\frac{2t+1}{2t^2+2t+1} + \frac{-2t+1}{2t^2-2t+1} &= \frac{(2t+1)(2t^2+1-2t) + (-2t+1)(2t^2+1+2t)}{(2t^2+1+2t)(2t^2+1-2t)} \\
&= \frac{2t(-4t)+4t^2+2}{(2t^2+1)-4t^2} = \frac{2-4t^2}{4t^4+1}
\end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2t+1)^2+1} + \frac{1}{(-2t+1)^2+1} &= \frac{(2t+1)^2+1+(-2t+1)^2+1}{((2t+1)^2+1)((-2t+1)^2+1)} \\
&= \frac{4+8t^2}{(4t^2+2+4t)(4t^2+2-4t)} \\
&= \frac{4+8t^2}{(4t^2+2)^2-16t^2} \\
&= \frac{4+8t^2}{16t^4+4} = \frac{1+2t^2}{4t^4+1}.
\end{aligned}$$

   D'où,

$$h(t)+h(-t) = \frac{2-4t^2}{4t^4+1} + 2\left(\frac{1+2t^2}{4t^4+1}\right) = \frac{4}{4t^4+1}.$$

(b) En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{4}{4t^4+1}$ a pour primitive la fonction

$$t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2t^2+2t+1}{2t^2-2t+1}\right) + \arctan(1+2t) - \arctan(1-2t).$$

$t \mapsto \dfrac{2t+1}{2t^2+2t+1}$ a pour primitive $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2t^2+2t+1)$ et $t \mapsto \dfrac{2}{(2t+1)^2+1}$ a pour primitive $t \mapsto \arctan(1+2t)$.

La fonction h a donc pour primitive la fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $H(t) = \dfrac{1}{2}\ln(2t^2+2t+1) + \arctan(1+2t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
Alors, la fonction $t \mapsto h(-t)$ a pour primitive $t \mapsto -H(-t)$.

Par la question précédente, on en déduit que la fonction $t \mapsto \dfrac{4}{4t^4+1}$ a pour primitive la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(2t^2+2t+1) + \arctan(1+2t) - \dfrac{1}{2}\ln(2t^2-2t+1) - \arctan(1-2t) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{2t^2+2t+1}{2t^2-2t+1}\right) + \arctan(1+2t) - \arctan(1-2t)$.

(c) Vérifier alors que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{4}{4t^4+1}\,dt = \pi$.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{4}{4t^4+1}\,dt &= \left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2t^2+2t+1}{2t^2-2t+1}\right) + \arctan(1+2t) - \arctan(1-2t)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2}\ln 1 + \pi/2 - (-\pi/2) - \frac{1}{2}\ln 1 - \arctan(1) + \arctan(1) = \pi.\end{aligned}$$

5. Calculer explicitement $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

   D'après la question (3), $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\,dy$.

   Le changement de variables $y = \sqrt{2}t$ donne $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^4}\,dy = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^4}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. D'où,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}.$$

6. (Question Bonus) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$.

   Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [\pi/6 + k\pi, 5\pi/6 + k\pi]$, $|\sin x| \geq 1/2$, donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{\sqrt{x}}\,dx \geq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(1/2)(4\pi/6)}{\sqrt{5\pi/6 + k\pi}} \geq \frac{\pi}{3\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1}} = +\infty.$$

Exercice 3. 1. Rappeler la définition d'une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$ est dite convexe si elle vérifie l'inégalité de convexité suivante :

$$\forall a,\, b \in I,\, \forall \lambda \in [0,1],\; f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda)f(b).$$

2. Le but de cette question est de montrer de manière élémentaire le cas particulier suivant de l'inégalité Jensen : soit un intervalle I de $\mathbb{R}$, un entier $n \geq 1$, des réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, et une fonction convexe f sur I. Alors, pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ on a

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i) \ .$$

(a) Vérifier l'inégalité pour $n = 1$ et $n = 2$.

Pour $n = 1$, c'est évident : en effet si on a un réel α_1 tel que $\sum_{i=1}^1 \alpha_i = 1$ alors $\alpha_1 = 1$ et pour tout $x_1 \in I$, l'inégalité est en fait donnée par l'égalité $f(1 \times x_1) = f(x_1) = 1 \times f(x_1)$.

Pour $n = 2$, il s'agit de inégalité de convexité : en effet si on a deux réels positifs α_1 et α_2 tels que $\sum_{i=1}^2 \alpha_i = 1$ alors $\alpha_2 = 1 - \alpha_1$ et par l'inégalité de convexités pour tous $x_1, x_2 \in I$ on a

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = f(\alpha_1 x_1 + (1-\alpha_1)x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + (1-\alpha_1) f(x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

(b) On suppose l'inégalité vérifiée pour un entier $n \geq 2$ fixé. On considère $n+1$ réels $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ de l'intervalle I, et $n+1$ réels positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1$

i. On pose $b = \dfrac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i}$. Vérifier que $b \in I$, puis que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) f(b) + \alpha_{n+1} f(a_{n+1}).$$

$b \in I$ car c'est un barycentre d'éléments de I. Vérifions cette propriété pour être exhaustif : soit $c = \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ et $d = \max\{a_1, \ldots, a_n\}$, qui sont deux points de I. Alors,

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i c}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i a_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i d}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = d$$

d'où $b \in [c, d] \subset I$.

De plus, $\sum_{i=1}^n \alpha_i$ et α_{n+1} sont deux réels positifs vérifiant $(\sum_{i=1}^n \alpha_i) + \alpha_{n+1} = 1$, donc l'inégalité de convexité (ou l'inégalité pour deux points) donne

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) = f\left(\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) b + \alpha_{n+1} a_{n+1}\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) f(b) + \alpha_{n+1} f(a_{n+1}).$$

ii. En déduire que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(a_i).$$

Comme $\sum_{i=1}^n \dfrac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} = 1$, on peut appliqué l'inégalité supposée satisfaite au rang n et on obtient

$$f(b) = f\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} a_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{i=1}^n \alpha_i} f(a_i).$$

D'où

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i\right) \leq \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) f(b) + \alpha_{n+1} f(a_{n+1}) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(a_i) + \alpha_{n+1} f(a_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i f(a_i).$$

(c) Conclure.

On vient de montrer par récurrence sur n l'inégalité voulue pour tout entier n. La question (a) correspond à l'initialisation de la récurrence, et la question (b) à l'hérédité.

3. Vérifier que la fonction $g : x \to \ln(1+e^x)$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Notons que g est une fonction de classe C^∞ car composée de telles fonctions. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $g'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ et $g''(x) = \dfrac{e^x(1+e^x) - e^x e^x}{(1+e^x)^2} = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$. La dérivée seconde de g étant toujours positive, la fonction g est convexe.
4. En déduire que pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, on a
$$\ln\left(1 + \left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{1/n}\right) \leq \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n (1+e^{x_i})\right)^{1/n}\right).$$
   Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Jensen à la fonction g :
$$\ln\left(1 + e^{(\sum_{i=1}^n x_i/n)}\right) \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln(1+e^{x_i}).$$
   Or,
$$e^{(\sum_{i=1}^n x_i/n)} = \left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{1/n} \quad \textit{et} \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln(1+e^{x_i}) = \ln\left(\left(\prod_{i=1}^n (1+e^{x_i})\right)^{1/n}\right),$$
   ce qui conclut.
5. Établir que pour tous $y_1, \dots, y_n \in]0, +\infty[$,
$$1 + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1+y_i)\right)^{1/n}.$$
   Soit $y_1, \dots, y_n \in]0, +\infty[$. On pose pour tout $i \in \{1, \dots n\}$, $x_i = \ln y_i$. Alors, d'après l'inégalité précédente et la croissance de la fonction exponentielle,
$$1 + \left(\prod_{i=1}^n y_i\right)^{1/n} = 1 + \left(\prod_{i=1}^n e^{x_i}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (1+e^{x_i})\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^n (1+y_i)\right)^{1/n}.$$
6. En déduire que pour tous $a_1, \dots, a_n \in]0, +\infty[$ et tous $b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$, on a
$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n (a_i+b_i)\right)^{1/n}.$$
   Soit $a_1, \dots, a_n \in]0, +\infty[$ et $b_1, \dots, b_n \in]0, +\infty[$. Par la question précédente, on a l'inégalité
$$1 + \left(\prod_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}\right)^{1/n} \leq \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{b_i}{a_i}\right)\right)^{1/n}.$$
   Il suffit alors de multiplier chaque membre par $\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n}$ pour conclure.