Examen- Mercredi 9 janvier 2019

Durée 3h.

Exercice 1. Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On considère f et g deux applications continues de E vers F.

1. Montrer que $A = \{x \in E \colon f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.
2. Montrer que s'il existe une partie $B \subset E$ dense dans E (i.e. $\overline{B} = E$) tel que
$$\forall x \in B,\ f(x) = g(x),$$
alors $f = g$.
(Indication : on pourra utiliser l'inclusion $B \subset A$.)
3. Soit une partie $X \subset E$. On pose
$$\Gamma = \{(x, f(x)) \colon x \in X\}.$$
   (a) Montrer que si X est fermé dans E alors Γ est fermé dans $E \times F$.
   (b) Montrer que si X est compact alors Γ est compact.

Exercice 2. On considère l'espace de Hilbert $E = L^2([-1, 1], \|\cdot\|_2)$. On rappelle que le produit scalaire sur E est donné par :
$$\langle f, g \rangle = \int_{[-1,1]} f(x)g(x)d\lambda(x) \text{ pour tous } f, g \in E.$$

1. Montrer que toute fonction continue $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ appartient à E.

On note
$$e_0 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array},\quad e_1 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array},\quad e_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \text{ et } e_3 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}.$$
On pose $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

2. Déterminer une base orthonormale de F.
3. Calculer la projection de e_3 sur F.
4. En déduire la valeur de
$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - (ax^2 + bx + c)\right|^2 dx.$$

Exercice 3. Soit un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ .$$

Exercice 4. Pour $(x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+x^2}$ et $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2(1+x^2)}$.

1. Montrer que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} f(x,t)dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$.
3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $1-\cos u \leq u^2/2$.
4. En déduire que la fonction $G : t \mapsto \displaystyle\int_0^{\infty} g(x,t)dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer $G(0)$.
6. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(t) = F(t)$ pour tout réel t.
7. Calculer $G'(0)$.
8. On fixe pour cette question un réel $t > 0$.
   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On note $I(t)$ cette intégrale.
   (b) En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{xt}{2}$ et la formule trigonométrique $1-\cos 2u = 2\sin^2 u$, montrer que $I(t) = Ct$ où
   $$C = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx.$$
   (c) En décomposant en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ montrer que
   $$G(t) = F(t) - F(0) + Ct.$$
9. Déduire de la question précédente et de la question 6, que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre (E).
10. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
11. En déduire que $F(t) = F(0)e^{-t}$ pour $t \geq 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$).
12. Montrer que $G'(t) = -F(0)e^{-t} + C$ pour tout $t \geq 0$.
13. En déduire la valeur de C.