Examen- Mercredi 9 janvier 2019

Durée 3h.

Exercice 1. (5 points) Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. On considère f et g deux applications continues de E vers F.

1. Montrer que $A = \{x \in E \colon f(x) = g(x)\}$ est fermé dans E.
   L'application $f - g$ est continue et le singleton $\{0_F\}$ est fermé dans F, donc $A = (f-g)^{-1}(\{0_F\})$ est fermé dans E.
2. Montrer que s'il existe une partie $B \subset E$ dense dans E (i.e. $\overline{B} = E$) tel que
$$\forall x \in B,\ f(x) = g(x),$$
   alors $f = g$.
   (Indication : on pourra utiliser l'inclusion $B \subset A$.)
   On a $B \subset A$ et comme A est fermé, on en déduit que $E = \overline{B} \subset A$, donc $A = E$ et $f = g$.
3. Soit une partie $X \subset E$. On pose
$$\Gamma = \{(x, f(x)) \colon x \in X\}.$$
   (a) Montrer que si X est fermé dans E alors Γ est fermé dans $E \times F$.
   Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ qui converge vers $(x, y) \in E \times F$. Alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers y. Comme X est fermé et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x_n \in X$, on en déduit que $x \in X$. De plus pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $(x_n, y_n) \in \Gamma$, d'où $y_n = f(x_n)$. Par continuité de f et passage à la limite, on obtient $y = f(x)$. Ainsi, $x \in X$ et $y = f(x)$, c'est-à-dire $(x, y) \in \Gamma$.
   (b) Montrer que si X est compact alors Γ est compact.
   Soit $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de Γ. Comme X est compact, il existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qui converge vers $x \in X$. Par continuité de f, on a $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f(x)$. Ainsi, $(x_{n_k}, y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x, f(x))$.

Exercice 2. (6,5 points) On considère l'espace de Hilbert $E = L^2([-1,1], \|\cdot\|_2)$. On rappelle que le produit scalaire sur E est donné par :
$$\langle f, g\rangle = \int_{[-1,1]} f(x)g(x)d\lambda(x) \text{ pour tous } f, g \in E.$$

1. Montrer que toute fonction continue $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ appartient à E. *Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, qui est en particulier borélienne. Alors f^2 étant également continue sur $[-1,1]$ (compact de $\mathbb{R}$),elle est bornée sur $[-1,1]$ et donc d'intégrale finie. Ainsi, $f \in E$.*

On note

$$e_0 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1 \end{array}, \quad e_1 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}, \quad e_2 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad e_3 : \begin{array}{ccc} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}.$$

On pose $F = \mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$.

2. Déterminer une base orthonormale de F. *On va utiliser le procédé de Gram-Schmidt.*

   $\langle e_0, e_0\rangle = 2$ donc e_0 est de norme $\sqrt{2}$. On pose $e_0' = \dfrac{e_0}{\sqrt{2}}$.

   On a $\langle e_1, e_0'\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\langle e_1, e_0\rangle = 0$. Ainsi e_1 est orthogonal à e_0'.

   On pose $e_1' = \dfrac{e_1}{\|e_1\|_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, e_1$.

   On pose $e_2'' = e_2 - \langle e_2, e_0'\rangle\, e_0' - \langle e_2, e_1'\rangle\, e_1' = e_2 - \dfrac{1}{2}\langle e_2, e_0\rangle\, e_0 - \dfrac{3}{2}\langle e_2, e_1\rangle\, e_1$.

   Or $\langle e_2, e_0\rangle = \dfrac{2}{3}$ et $\langle e_2, e_1\rangle = 0$.

   D'où $e_2'' = e_2 - \dfrac{1}{3}\, e_0$, c'est-à-dire la fonction polynomiale $x \mapsto x^2 - \dfrac{1}{3}$.

   On pose alors $e_2' = \dfrac{e_2''}{\|e_2''\|_2} = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\, e_2''$.

   Alors, (e_0', e_1', e_2') est une base orthonormale.

3. Calculer la projection de e_3 sur F.

   On a $\langle e_3, e_0'\rangle = 0$ et $\langle e_3, e_2'\rangle = 0$. Ainsi, $p_F(e_3)$ la projection de e_3 sur F est égale à $\langle e_3, e_1'\rangle\, e_1' = \dfrac{3}{5}\, e_1$.

4. En déduire la valeur de

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - (ax^2 + bx + c)\right|^2 dx.$$

   On a

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} \left|x^3 - (ax^2 + bx + c)\right|^2 dx = \|e_3 - p_F(e_3)\|_2^2 = \frac{8}{175}.$$

Exercice 3. (3 points)
Soit un entier $n \geq 2$ et des réels strictement positifs x_1, x_2, ..., x_n. Montrer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \;.$$

(Cette question a été traitée en cours, comme exemple d'application de l'inégalité de Jensen ; on peut utiliser soit la convexité de l'exponentielle, soit la concavité de ln*.)*

On a
$$\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln x_i} = e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln x_i}$$
Comme la fonction exponentielle est convexe et $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$*, l'inégalité de Jensen donne*
$$e^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\ln x_i} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e^{\ln x_i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i.$$
L'inégalité arithmético-géométrique est ainsi démontrée.

Exercice 4. (13 points) Pour $(x,t) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}$, on pose $f(x,t) = \dfrac{\cos(xt)}{1+x^2}$ et $g(x,t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2(1+x^2)}$.

1. Montrer que la fonction $F : t \mapsto \displaystyle\int_0^\infty f(x,t)dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   - *Pour tout* $x \in]0,\infty[$*, la fonction* $t \mapsto f(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
   - *(Domination indépendante de la variable* t*) Pour tout* $(x,t) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}$*, on a*
   $$\mid f(x,t) \mid \leq \frac{1}{1+x^2}$$
   et l'application $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *est intégrable sur* $]0,\infty[$ *;*
   - *Pour tout* $t \in \mathbb{R}$*, la fonction* $x \mapsto f(x,t)$ *est borélienne sur* $]0,\infty[$ *car continue sur* $]0,\infty[$.

   Ainsi, par théorème de continuité des intégrales à paramètres $t \mapsto F(t)$ *est bien définie et continue sur* $\mathbb{R}$.
2. Calculer $F(0)$.
   $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a $1 - \cos u \leq u^2/2$.
   Soit $u \in \mathbb{R}$*. On a* $1 - \cos u = 2\sin^2\frac{u}{2} \leq \frac{u^2}{2}$.
4. En déduire que la fonction $G : t \mapsto \displaystyle\int_0^\infty g(x,t)dx$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
   - *Pour tout* $x \in]0,\infty[$*, la fonction* $t \mapsto g(x,t)$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *;*
   - *(Domination indépendante de la variable* t*) Ici, pour dominer par une fonction intégrable, indépendamment de la variable* t*, on est obligé de restreindre* t *à un intervalle borné.*
   Soit $a > 0$*. Pour tout* $(x,t) \in]0,\infty[\times]-a,a[$*, on a par la question précédente*
   $$|g(x,t)| \leq \frac{x^2t^2}{2x^2(1+x^2)} = \frac{t^2}{2(1+x^2)} \leq \frac{a^2}{2(1+x^2)}$$
   et l'application $x \mapsto \dfrac{a^2}{2(1+x^2)}$ *est intégrable sur* $]0,\infty[$ *;*

- *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est borélienne sur $]0,\infty[$ car continue sur $]0,\infty[$.*

Ainsi, par théorème de continuité des intégrales à paramètres $t \mapsto G(t)$ est bien définie et continue sur $]-a,a[$, et donc sur $\mathbb{R}$ (car ce résultat est vérifié pour tout $a>0$).

5. Calculer $G(0)$.
   $G(0) = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.
6. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(t) = F(t)$ pour tout réel t.

   - *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ par (4) ;*
   - *La fonction g est C^∞ sur $]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et donc en particulier :*
     — *Pour tout $x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$;*
     — *Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les fonctions $x \mapsto \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$ et $x \mapsto \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)$ sont boréliennes sur $]0,+\infty[$ car continues sur $]0,+\infty[$.*
   - *Pour tout $(x,t) \in]0,\infty[\times\mathbb{R}$, on a :*
     —
     $$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{x(1+x^2)}$$
     —
     $$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\cos(xt)}{1+x^2} = f(x,t).$$
   - *(Dominations indépendantes de la variable t) On se restreint à nouveau à l'intervalle $]-a,a[$ pour un réel $a>0$. On a pour tout $(x,t) \in]0,\infty[\times]-a,a[$:*
     —
     $$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \leq \frac{ax}{x(1+x^2)} = \frac{a}{1+x^2}$$
     et l'application $x \mapsto \frac{a}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $]0,\infty[$;
     —
     $$\left|\frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$
     et l'application $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est intégrable sur $]0,\infty[$.

   Ainsi, par le théorème dérivabilité des intégrales à paramètres, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-a,a[$ donc sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
   —
   $$G'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial g}{\partial t}(x,t)dx = \int_0^\infty \frac{\sin(xt)}{x(1+x^2)}dx \text{ et}$$
   —
   $$G''(t) = \int_0^\infty \frac{\partial^2 g}{\partial t^2}(x,t)dx = \int_0^\infty f(x,t)dx = F(t).$$
7. Calculer $G'(0)$.
   $G'(0) = \int_0^{+\infty} 0dx = 0$.

8. On fixe pour cette question un réel $t > 0$.

   (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. On note $I(t)$ cette intégrale.

   La fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}$ *est continue sur* $]0,+\infty[$.

   — *En* 0 : $1-\cos(xt) = x^2t^2/2 + o(x^2)$, *donc* $x \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}$ *a pour limite* $t^2/2$ *en* 0 *(elle est prolongeable par continuité en* 0*).*

   — *En* $+\infty$: $\left|\dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}\right| \leq \dfrac{2}{x^2}$ *et* $x \mapsto \dfrac{2}{x^2}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$.

   On en déduit que la fonction $x \mapsto \dfrac{1-\cos(xt)}{x^2}$ *est intégrable sur* $]0,+\infty[$.

   (b) En utilisant le changement de variable $u = \dfrac{xt}{2}$ et la formule trigonométrique $1-\cos 2u = 2\sin^2 u$, montrer que $I(t) = Ct$ où

$$C = \int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx.$$

$$I(t) = \int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{x^2}dx = \int_0^\infty \frac{1-\cos(2u)}{(4u^2/t^2)}(2/t)du = \int_0^\infty t\frac{\sin^2(u)}{u^2}du = Ct.$$

   (c) En décomposant en éléments simples la fraction $\dfrac{1}{x^2(x^2+1)}$ montrer que

$$G(t) = F(t) - F(0) + Ct.$$

   On a $\frac{1}{x^2(x^2+1)} = \frac{1}{x^2} + \frac{-1}{1+x^2}$, *d'où*

$$\begin{aligned} G(t) &= \int_0^\infty \left(\frac{1-\cos(xt)}{x^2} - \frac{1-\cos(xt)}{1+x^2}\right) \\ &= I(t) - F(0) + F(t) \end{aligned}$$

9. Déduire de la question précédente et de la question 6, que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre (E).
   Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, *on a* $F(t) = G(t) + \frac{\pi}{2} - Ct$. *Comme* G *est de classe* C^2, *on en déduit que* F *est également de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Enfin, en dérivant deux fois on obtient* $F''(t) = G''(t) = F(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$. *On note* (E) *l'équation différentielle*

$$y" = y$$

10. Donner l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
    Les solutions de (E) *sont les fonctions de la forme* $t \mapsto k_1e^{-t} + k_2e^t$ *avec* $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$.

11. En déduire que $F(t) = F(0)e^{-t}$ pour $t \geq 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$).

    On a vu en (1) que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $F(t) \leq \frac{\pi}{2}$. Ainsi, par la question précédente, sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction F ne peut-être que de la forme $t \mapsto k_1 e^{-t}$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$. Par continuité de F en 0, on obtient que $F(t) = F(0)e^{-t}$ pour tout $t \geq 0$.

12. Montrer que $G'(t) = -F(0)e^{-t} + C$ pour tout $t \geq 0$.

    On dérive l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ trouvée en (8c) et on utilise la continuité de G' en 0.

13. En déduire la valeur de C.

    On évalue en 0 et on trouve $C = \frac{\pi}{2}$.