**L3 : Mathématiques et Économie 2019–2020** **16 janvier 2020**

# Examen : Topologie et théorie de la mesure

Durée : 3 heures

LES DOCUMENTS ET LES GADGETS ÉLECTRONIQUES NE SONT PAS AUTORISÉS
**LES RÉPONSES AUX QUESTIONS DOIVENT ÊTRE JUSTIFIÉES**
Un barême est donné à titre indicatif. (il est donc susceptible de changer).
**Vous avez 2 copies. Chaque partie, I et II, doit être rendue sur une copie différente.**

---

## Partie I (18 points)

**Questions de cours : (4 points)**

1. Énoncer le théorème définissant la mesure de Lebesgue.
2. Énoncer le théorème d'approximation de Weierstrass.
3. Énoncer l'inégalité de Hölder.
4. Énoncer le théorème de projection sur un convexe fermé.

**Exercice 1 (3 points)** Soient $C = [0,1] \times [0,+\infty[ \subset \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = \frac{(x+y-4)^4}{4} + \frac{(x-y)^4}{4}.$$

1. Montrer que $C$ est un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que $C$ est compact ? (justifier)
2. Montrer que la projection sur le convexe fermé $C$ est donnée par :
$$P_C(x,y) = (\min(1, \max(0,x)), \max(0,y)).$$
3. Montrer que $f$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que $f$ atteint son minimum sur $C$ en $(1,2)$.

**Exercice 2 (11 points)** Soient $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $\boldsymbol{\Omega} = ]\mathbf{0}, +\infty[$ et $\lambda_2$ la mesure de Lebesgue sur $\Omega^2$.
Soient $H_1, H_2$ les espaces de Hilbert réels $H_1 = L^2(\Omega, \lambda), H_2 = L^2(\Omega^2, \lambda_2)$, de produit scalaire et normes définies, pour $f_1, h_1 \in H_1, f_2, h_2 \in H_2$, par :

$$\langle f_1, h_1 \rangle = \int_\Omega f_1 h_1 d\lambda, \quad ||f_1||_2 = \sqrt{\int_\Omega f_1^2 d\lambda}, \quad \langle f_2, h_2 \rangle = \int_{\Omega^2} f_2 h_2 d\lambda_2, \quad ||f_2||_2 = \sqrt{\int_{\Omega^2} f_2^2 d\lambda_2}.$$

On pose pour $x, t \in \Omega$ : $g_2(x,t) = e^{-(x^2+t^2+1)/2}$, et pour $x \in \Omega$, $f \in H_1$ :

$$T_f(x) = \int_\Omega g_2(x,t) f(t) d\lambda(t).$$

*Partie A : sur les bases de $H_1$.*

1. Soit $e_0(t) = e^{-t/2}, e_1(t) = (t-1)e^{-t/2}$. Montrer que $e_0, e_1 \in H_1$.
2. Montrer que $(e_0, e_1)$ est une famille orthonormale.
3. Montrer que l'espace vectoriel $F$ engendré par $e_0, e_1$ est fermé dans $H_1$.
4. Est-ce que $(e_0, e_1)$ est une base hilbertienne de $H_1$ ? (Indication : on pourra par exemple chercher des familles libres dans $H_1$ OU utiliser $e_2(t) = (t^2 - 4t + 2)e^{-t/2}$ et considérer le complément orthogonal de $\mathrm{Vect}(e_0, e_1)$ dans $\mathrm{Vect}(e_0, e_1, e_2)$ ).

*Partie B : sur $T_f$.*

Le but des questions suivantes est de montrer que $T(f) = T_f$ définit une application linéaire continue $T : H_1 \to H_1$. **Les questions suivantes sont presque indépendantes de la partie A et n'utilisent que le résultat $e_0 \in H_1$ (du 1).**

5. Calculer $||g_2||_2^2 = \int_{\Omega^2} g_2^2 d\lambda_2$. (Indication : utiliser un changement de variable usuel.)
6. Soit $g_1 : \Omega \to [0, +\infty]$ définie par :
$$g_1(x) = \sqrt{\int_\Omega g_2^2(x,t) d\lambda(t)}.$$
En utilisant un théorème du cours que l'on précisera, montrer que son carré $g_1^2$ est Lebesgue-intégrable et $||g_1||_2 = ||g_2||_2$.
**On suppose dans les 4 questions suivantes que $f \in H_1$.**
7. Montrer que $T_f$ est bien définie (Indication : on pourra utiliser, en justifiant, que le produit $e_0 f$ est Lebesgue intégrable).
8. En considérant $T_f$ comme une intégrale à paramètre, montrer que $T_f$ est continue sur $\Omega$.
9. En utilisant une inégalité du cours qu'on nommera (et $g_1$ vu au 6), montrer que :
$$|T_f(x)| \leq ||f||_2 g_1(x).$$
10. Montrer que $T_f \in H_1$ et
$$||T_f||_2 \leq ||f||_2 ||g_2||_2.$$
11. Expliquer pourquoi $T(f) = T_f$ définit une application linéaire $T : H_1 \to H_1$. En utilisant la question précédente et un résultat du cours, montrer que $T$ est continue.

---

## Partie II (9 points)

**Exercice 3** Soit $(X, d)$ un espace métrique. Rappelons que *la tribu borélienne de $X$*, notée par $\mathcal{B}(X)$, est la tribu engendrée par les ouverts de $X$. Soit $\Phi : X \to X$ un homéomorphisme, c'est-à-dire $\Phi$ est bijectif et $\Phi$ et $\Phi^{-1}$ sont continus.

1. Montrer que $A \in \mathcal{B}(X)$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathcal{B}(X)$. (Dans ce cas-là, on dit que *la tribu $\mathcal{B}(X)$ est invariante par rapport à $\Phi$.*)
2. Montrer que $\{B \in \mathcal{B}(X) : \Phi(B) = B\}$ est une tribu.
3. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé muni de la distance associée $d(x,y) = \|x-y\|$, $x$ et $y \in X$. Montrer que $\{B \in \mathcal{B}(X) : B = -B\}$ est une tribu.
4. Soit $X = \mathbb{R}^n$ et $d$ sa distance euclidienne. (Rappelons que $d(x,y) = \sqrt{< x-y, x-y >}$ et $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ où $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application qui préserve $d$, c'est-à-dire $d(x,y) = d(f(x), f(y))$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On se propose de montrer que $f$ est *un homéomorphisme qui préserve la mesure de Lebesgue* $\lambda_n$ (c'est-à-dire $\lambda_n(B) = \lambda_n(f(B))$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).
Soit $f(0) = v$ et $\varphi(x) = f(x) - v$ où $x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $< \varphi(x), \varphi(y) >=< x, y >$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$. (Indication : on pourra démontrer que $2 < x, y >= d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2$.)
   (b) Montrer que si $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ alors $\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ aussi.
   (c) Montrer que si $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ alors $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
   (d) En déduire que $\varphi$ est une application linéaire inversible.
   (e) Conclure.
5. Donner un exemple d'un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui ne préserve pas $\lambda_2$.