L3 : Mathématiques et Économie **6 novembre 2019**
2019–2020

Correction de l'Examen : Topologie et théorie de la mesure

Partie I (18 points)

Questions de cours : (4 points) (cf. cours).

Exercice 1 (3 points) Soit $C = [0,1] \times [0,+\infty[\subset \mathbb{R}^2$ et

$$f(x,y) = \frac{(x+y-4)^4}{4} + \frac{(x-y)^4}{4}.$$

1. Montrons que C est un convexe fermé de $\mathbb{R}^2$. Est-ce que C est compact ? (justifier) C est un produit d'intervalles fermés de $\mathbb{R}$ donc un convexe fermé. C n'est pas borné car $(0,n) \in C$ et $||(0,n)|| = n \to \infty$, donc C n'est pas compact.
2. Montrons que la projection sur le convexe fermé C est donnée par :

$$P_C(x,y) = (\min(1, \max(0,x)), \max(0,y)).$$

On utilise la caractérisation de la projection sur un convexe fermé dans le Hilbert $\mathbb{R}^2$, il faut montrer que pour $(u,v) \in C$, on a :

$$\langle (x - \min(1,\max(0,x)), y - \max(0,y)), (u - \min(1,\max(0,x)), v - \max(0,y)) \rangle \leq 0$$

On distingue 2 cas si $y > 0$, $y - \max(0,y) = 0$ et $(y - \max(0,y))(v - \max(0,y)) = 0 \leq 0$. et si $y \leq 0$, alors $(y - \max(0,y))(v - \max(0,y)) = yv \leq 0$ vu $v \geq 0$. Dans tous les cas, on a $A = (y - \max(0,y))(v - \max(0,y)) \leq 0$.
Pour borner le deuxième terme $B = (x - \min(1,\max(0,x))(u - \min(1,\max(0,x))$, on distingue 3 cas. Si $x \in [0,1], x - \min(1,\max(0,x) = 0$, donc $B = 0$. Si $x \geq 1$,, $B = (x-1)(u-1) \leq 0$ car $u \leq 1, (x-1) \geq 0$. Enfin, si $x \leq 0$, $B = (x-0)(u-0) \leq 0$ car $u \geq 0, x \leq 0$. Dans tous les cas $B \leq 0$. En sommant, on obtient :

$$\langle (x - \min(1,\max(0,x)), y - \max(0,y)), (u - \min(1,\max(0,x)), v - \max(0,y)) \rangle = A + B \leq 0$$

3. Montrons que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
Comme f est un polynôme donc de classe C^2, on calcule

$$\nabla f(x,y) = \big((x+y-4)^3 + (x-y)^3, (x+y-4)^3 - (x-y)^3\big)$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 3(x+y-4)^2 + 3(x-y)^2 & 3(x+y-4)^2 - 3(x-y)^2 \\ 3(x+y-4)^2 - 3(x-y)^2 & 3(x+y-4)^2 + 3(x-y)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

On a $rt - s^2 = 9(a+b)^2 - 9(a-b)^2 = 36ab$ avec $a = (x+y-4)^2, b = (x-y)^2$ donc $rt - s^2 \geq 0$ et $r \geq 0$ donc $Hf(x,y) \geq 0$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ donc, par la caractérisation différentielle de la convexité, f est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f atteint son minimum sur C en $(1,2)$. $(1,2) + N_C((1,2)) = P_C^{-1}((1,2)) = [1,+\infty[\times \{2\}$ donc $N_C((1,2)) = [0,+\infty[\times \{0\}$. Comme f est C^1 convexe sur le convexe C, f atteint son minimum sur C en $(1,2)$ si et seulement si $-\nabla f(1,2) \in N_C((1,2))$. Or

$$\nabla f(1,2) = \big((1+2-4)^3 + (1-2)^3, (1+2-4)^3 - (1-2)^3\big) = (-1-1, -1+1),$$

donc $-\nabla f(1,2) = (2,0) \in [0,+\infty[\times \{0\}$ donc f atteint son minimum sur C en $(1,2)$.

Exercice 2 (11 points) Soient λ la mesure de Lebesgue sur $\Omega =]0, +\infty[$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur Ω^2.
Soient H_1, H_2 les espaces de Hilbert réels $H_1 = L^2(\Omega, \lambda), H_2 = L^2(\Omega^2, \lambda_2)$, de produit scalaire et normes définies pour $f_1, h_1 \in H_1, f_2 \in H_2$ par :

$$\langle f_1, h_1 \rangle = \int_\Omega f_1 h_1 d\lambda, \qquad ||f_1||_2 = \sqrt{\int_\Omega f_1^2 d\lambda}, \qquad ||f_2||_2 = \sqrt{\int_{\Omega^2} f_2^2 d\lambda_2}.$$

On pose pour $x, t \in \Omega$:

$$g_2(x,t) = e^{-(x^2+t^2+1)/2},$$

et pour $x \in \Omega$, $f \in H_1$:

$$T_f(x) = \int_\Omega g_2(x,t) f(t) d\lambda(t).$$

Partie A : sur les bases de H_1.

1. Soit $e_0(t) = e^{-t/2}, e_1(t) = (t-1)e^{-t/2}$. Montrons que $e_0, e_1 \in H_1$. D'abord, e_0, e_1 sont continus (par produit de polynômes et d'exponentielles) donc mesurables. $|e_0(t)|^2 \leq e_0(t)$ et $|e_1(t)|^2 = (t-1)^2 e^{-t} \leq C e_0(t)$
   car $(t-1)^2 e_0(t)$ est continue et tend vers 0 en $+\infty$ donc est bornée par une constante C sur $\mathbb{R}_+$. Pour voir que e_0, e_1 sont de carré intégrable, il suffit donc, grâce aux dominations précédentes, de voir que e_0 est intégrable, mais c'est le cas car :
   $$\int_0^\infty e_0(t)dt = [-2e^{-t/2}]_0^\infty = 2 < +\infty.$$
2. Montrons que (e_0, e_1) est une famille orthonormale.
   On calcule
   $$\langle e_0, e_1 \rangle = \int_0^\infty (t-1)e^{-t}dt = [-(t-1)e^{-t} - e^{-t}]_0^\infty = -1 + 1 = 0.$$
   donc (e_0, e_1) est une famille orthogonale, puis :
   $$||e_0^2||_2^2 = \int_0^\infty e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^\infty = 1$$
   $$||e_1^2||_2^2 = \int_0^\infty (t-1)^2 e^{-t}dt = [-(t-1)^2 e^{-t} - 2(t-1)e^{-t} - 2e^{-t}]_0^\infty = 1 - 2 + 2 = 1.$$
   On a utilisé un résultat de croissance comparée pour dire que $\lim_{t\to\infty} P(t)e^{-t} = 0$ pour tout polynôme P. Donc e_0, e_1 sont de norme 1.
3. $F = Vect(e_0, e_1)$ est de dimension finie, donc par le cours, complet et donc fermé dans H_1.
4. Est-ce que (e_0, e_1) est une base hilbertienne de H_1 ? (justifier)
   Méthode 1 : Par l'absurde, si c'était le cas, F serait dense dans H, donc $\overline{F} = H$ mais par la question précédente $\overline{F} = F$ et donc on aurait $F = H$ et H serait de dimension 2. Or $1_{[i,i+1[}$ est une famille orthogonale de H_1, donc $(1_{[0,1[}, 1_{[1,2[}, 1_{[2,3[})$ est une famille libre donc H_1 est de dimension plus grande que 3. C'est la contradiction voulue avec $F = H$. Donc (e_0, e_1) n'est pas une base hilbertienne.

Méthode 2 : Il suffit de voir que H_1 n'est pas de dimension 2 (en fait, il est de dimension infini) ! On cherche, a, b avec $e_2(t) = (t^2 + at + b)e^{-t/2}$ et $e_2 \in H_1$ orthogonal à e_0, e_1. On va trouver le e_2 donné dans l'indication.

D'abord $e_2^2(t) = (t^2+at+b)^2 e_0(t)e_0(t)$ comme au 1, $(t^2+at+b)^2e_0(t)$ est continue et tend vers 0 à l'infini et donc est borné, et comme e_0 est intégrable, le produit e_2^2 est intégrable et $e_2 \in H_1$. Trouvons a, b tels que e_2 est orthogonal à e_0, e_1.

$$\langle e_0, e_2\rangle = \int_0^\infty (t^2+at+b)e^{-t}dt = [-(t^2+at+b)e^{-t} - (2t+a)e^{-t} - 2e^{-t}]_0^\infty = b+a+2 = 0.$$

$$\langle e_1, e_2\rangle = \int_0^\infty (t-1)(t^2+at+b)e^{-t}dt = \int_0^\infty (t^3+(a-1)t^2+(b-a)t-b)e^{-t}dt$$
$$= [-(t^3+(a-1)t^2+(b-a)t-b)e^{-t} - (3t^2+(a-1)2t+(b-a))e^{-t} - (6t+(a-1)2)e^{-t} - 6e^{-t}]_0^\infty$$
$$= -b+(b-a)+2(a-1)+6 = a+4 = 0.$$

Ceci donne $a = -4, b = 2$. (e_0, e_1, e_2) est orthogonale donc $e_2 \in [Vect(e_0, e_1)]^\perp \neq \{0\}$ si on avait (e_0, e_1) base de H_1 on aurait

$$[Vect(e_0, e_1)]^\perp = [\overline{Vect(e_0, e_1)}]^\perp = H_1^\perp = \{0\}.$$

c'est la contradiction voulue.
(Alternativement, on peut aussi raisonner comme à la méthode 1 grâce à la dimension). On retrouve que (e_0, e_1) n'est pas une base hilbertienne de H_1

Partie B : sur T_f.

5. Calculons $||g_2||_2$. Comme g_2 est continue (donc mesurable) et positive, il suffit de calculer

$$||g_2||_2^2 = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x^2+t^2+1)}dxdt$$

et de montrer que ce nombre est fini pour savoir que $g_2 \in H_2$.
On fait un changement de variable en polaire $(x, t) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = \varphi(r, \theta)$ par le cours $\varphi : U =]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\to V = \mathbb{R}^2 - [0, \infty[\times\{0\}$ est un C^1-difféomorphisme avec$det(J\varphi) = r$. Si $D =]0, +\infty[^2$ on a $\varphi^{-1}(D) =]0, +\infty[\times]0, \pi/2[$, le théorème de changement de variable donne donc :

$$||g_2||_2^2 = \int_D e^{-(x^2+t^2+1)}dxdt = \int_{\varphi^{-1}(D)} e^{-r^2-1}rdrd\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^\infty re^{-r^2-1} = \frac{\pi}{2}[-\frac{e^{-r^2-1}}{2}]_0^\infty = \frac{\pi}{4e} < +\infty.$$

On a donc $g_2 \in H_2$ et $||g_2||_2 = \sqrt{\pi/4e}$.
6. Soit g_1 définie par :

$$g_1(t) = \sqrt{\int_\Omega g_2^2(t, x)d\lambda(x)}.$$

On utilise le théorème de Fubini-Tonelli, avec la mesure de Lebesgue λ (qui est σ-finie), appliqué à $g_2^2 \geq 0$ dont on vient de voir qu'elle est même Lebesgue intégrable (on pourrait donc aussi appliquer Fubini à la place de Fubini-Tonelli), donc on sait que $\int_\Omega g_2^2(t, x)d\lambda(x) = g_1(t)^2$ est mesurable (positive) et

$$||g_1||_2^2 = \int_\Omega\int_\Omega g_2^2(t, x)d\lambda(x)d\lambda(t) = \int_{\Omega^2} g_2^2 d\lambda_2 = ||g_2||_2^2 < +\infty.$$

donc comme la valeur est finie g_1^2 est Lebesgue-intégrable et de plus on vient de voir $||g_1||_2 = ||g_2||_2$.
On suppose dans les 4 questions suivantes que $f \in H_1$.

7. Pour montrer que T_f est bien définie, il faut voir que son intégrant est intégrable mais vu $t^2+1 \geq 2t$ $|g_2(x,t)f(t)| \leq e^{-x^2/2}e_0^2 \leq e_0$ on obtient la domination $|g_2(x,t)f(t)| \leq e_0(t)f(t)$ et $e_0 f$ est intégrable par l'inégalité de Hölder avec $p=q=2$, donc (par domination) c'est aussi le cas de $t \mapsto g_2(x,t)f(t)$
8. Montrons que T_f est continue sur Ω. g_2 est continue sur $\mathbb{R}^2$, on applique le théorème de continuité avec condition de domination (cas simplifié C^k avec $k=0$ sur l'ouvert Ω^2) avec la domination précédente $|g_2(x,t)| \leq e_0(t)f(t)$. Comme $e_0 f$ est bien intégrable par le 6 (et ne dépend pas de x), on obtient que l'intégrale à paramètre T_f est continue sur Ω.
9. En appliquant de nouveau l'inégalité de Hölder (avec $p=q=2$ ou Cauchy-Schwarz) :

$$|T_f(x)| \leq \int_\Omega |g_2(x,t)f(t)|d\lambda(t) \leq \sqrt{\int_\Omega f(t)d\lambda(t)}\sqrt{\int_\Omega g_2^2(x,t)d\lambda(t)} = ||f||_2 g_1(x).$$

10. Montrons que $T_f \in H_1$. Déjà T_f est continue donc mesurable, il suffit d'intégrer la question précédente (et d'utiliser la linéarité de l'intégrale) :

$$||T_f||_2^2 = \int_\Omega |T_f(t)|^2 dt \leq ||f||_2^2 \int_\Omega |g_1(t)|^2 dt = ||f||_2^2 ||g_2||_2^2 < +\infty$$

La finitude donne $T_f \in H_1$ et la dernière égalité vient du 6.
11. Montrons que $T(f) = T_f$ définit une application linéaire continue $T : H_1 \to H_1$.
D'abord, on vient de voir que $T : H_1 \to H_1$ (T est bien défini à valeur dans H_1). T est linéaire par linéarité de l'intégrale. Il suffit donc de montrer qu'elle est bornée sur la boule unité pour conclure qu'elle est continue. Mais on vient de voir

$$\sup_{||f||_2 \leq 1} ||T_f||_2 \leq ||g_2||_2 < \infty.$$

Ce qui conclut et donne aussi $|||T||| \leq ||g_2||_2$.

Partie II (9 points)

Exercice 3 Rappelons que si X est un espace topologique *la tribu borélienne de X*, notée par $\mathcal{B}(X)$, est la tribu engendrée par les ouverts de X. Soient (X,d) un espace métrique (donc topologique) et $\Phi : X \to X$ un homéomorphisme, c.à.d. Φ est bijectif et Φ et Φ^{-1} sont continus.

1. Montrons que $A \in \mathcal{B}(X)$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathcal{B}(X)$.
   Comme Φ continue donc borélienne, $A = \Phi^{-1}(\Phi(A))$ est borélienne dès que $\Phi(A) \in \mathcal{B}(X)$. Réciproquement, si A est borélien il en est de même de l'image inverse $\Phi(A) = (\Phi^{-1})^{-1}(A)$ vu Φ^{-1} continue donc borélienne.
2. Montrons que $\mathcal{T} := \{B \in \mathcal{B}(X) : \Phi(B) = B\}$ est une tribu.
   D'abord $\emptyset \in \mathcal{T}$ car $\Phi(\emptyset) = \emptyset$. Il reste à voir $\mathcal{T}$ est stable par complémentaire et union dénombrable. Soit $\Psi = \Phi^{-1}$ on sait (TD1) que les images inverses commutent avec les complémentaires et les unions donc

   $$\Phi(B^c) = \Psi^{-1}(B^c) = (\Psi^{-1}(B))^c = B^c$$

   si $B \in \mathcal{T}$ et donc $B^c \in \mathcal{T}$.
   De même si $B_n \in \mathcal{T}$, on a :

   $$\Phi(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \Psi^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Psi^{-1}(B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

   donc $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathcal{T}$.

3. Soit $(X, |\cdot|)$ un espace vectoriel normé muni de la distance associée $d(x,y) = |x-y|$, x et $y \in X$. Montrons que $\{B \in \mathcal{B}(X) : B = -B\}$ est une tribu. Il suffit de noter que $\Phi(x) = -x = \Phi^{-1}(x)$ est linéaire isométrique car $||\Phi(x)|| = ||x||$ donc 1-lipschitz, donc continue. Φ est donc un homeomorphisme et le 2 s'applique.
4. Soit $X = \mathbb{R}^n$ et d sa distance euclidienne. (Rappelons que $d(x,y) = \sqrt{< x-y, x-y >}$ et $< x, y >= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$ où $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application qui préserve d, c.à.d. $d(x,y) = d(f(x), f(y))$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On se propose de montrer que f est *un homéomorphisme qui préserve la mesure de Lebesgue* λ_n (i.e. $\lambda_n(B) = \lambda_n(f(B))$ si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$).
   Soit $f(0) = v$ et $\varphi(x) = f(x) - v$ où $x \in \mathbb{R}^n$.
   (a) Montrer que $< \varphi(x), \varphi(y) >=< x, y >$ où $x, y \in \mathbb{R}^n$.
   On utilise l'identité de polarisation d'un espace euclidien vu en cours :
   $$2 < x, y >= d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2.$$
   $$\begin{aligned} 2 < \varphi(x), \varphi(y) > &= \|0 - \varphi(x)\|^2 + \|0 - \varphi(y)\|^2 - \|\varphi(x) - \varphi(y)\|^2 \\ &= d(f(0), f(x))^2 + d(f(0), f(y))^2 - d(f(x), f(y))^2 \end{aligned}$$
   Or f préserve la distance, donc on obtient (en réutilisant l'identité de polarisation :
   $$2 < \varphi(x), \varphi(y) >= d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2 = 2 < x, y >$$
   ce qu'on voulait.
   (b) Montrons que si $e_1, \cdots, e_n$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ alors $\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ aussi. Par la question précédent, on a
   $$< \varphi(e_i), \varphi(e_j) >=< e_i, e_j >= 1_{i=j}$$
   donc $(\varphi(e_i))$ est une famille orthonormale. Par le théorème des bases, c'est donc une famille libre, donc l'espace qu'elle engendre est de dimension n, comme l'espace ambiant $\mathbb{R}^n$, c'est donc qu'elle est aussi génératrice, donc une base orthonormée.
   (c) Montrons que si $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)$ où $x_i \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ alors $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$.
   On sait que $x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x\rangle e_i$ donc il suffit de voir $\langle e_i, x\rangle = x_i$. Mais on a par le (a) :
   $$\langle e_i, x\rangle = \langle \varphi(e_i), \varphi(x)\rangle = \sum_{i=1}^n x_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j)\rangle = x_j$$
   où on a utilisé que $(\varphi(e_i))$ est une famille orthonormale à la dernière question.
   (d) En déduire que φ est une application linéaire inversible. La question précédente montre que φ est injective (en écrivant $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n) = \varphi(y)$ sur la base $(\varphi(e_i))_{i=1,\ldots,n}$, on déduit $x = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x\rangle e_i = y$.
   Réciproquement soit $y = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)$ il faut montrer que pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on a $y = \varphi(x)$ (de sorte que φ sera surjective et qu'en plus on aura vu $\varphi(x) = x_1\varphi(e_1) + \cdots + x_n\varphi(e_n)$ ce qui donnera la linéarité de φ).
   Mais on sait que
   $$\langle \varphi(e_i), \varphi(x)\rangle = \langle e_i, x\rangle = x_i = \langle \varphi(e_i), y\rangle$$
   donc $\varphi(x) - y$ est orthogonal à $\varphi(e_i)$ pour tout i donc à $\mathbb{R}^n$, donc est nul, ce qui donne $\varphi(x) = y$ comme voulu.

(e) Conclusion. φ est une application linéaire en dimension finie donc continue, inversible donc d'inverse linéaire en dimension finie donc d'inverse aussi continue. Donc φ est un homéomorphisme. Donc f composée de φ avec une translation (autre homéomorphisme) est aussi un homéomorphisme. Par le changement de variable linéaire, on sait que $\lambda_n(B)|det(\varphi)| = \lambda_n(f(B))$. Il suffit donc de rappeler que φ est une application linéaire qui préserve le produit scalaire, donc orthogonale. $\varphi^{-1} = \varphi^t$ donc $det(\varphi)^2 = det(\varphi^t\varphi) = det(I) = 1$ donc $|det(\varphi)| = 1$ ce qui conclut.

5. Donnons un example d'un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui ne préserve pas λ_2. Il suffit de prendre une application liénaire dont le déterminant n'est pas 1, par exemple $\Phi(x) = 2x$. On a $\det(\Phi) = 2^2 = 4$. Φ est linéaire inversible et par le théorème de changement de variable linéaire, on obtient : $4\lambda_n(B)) = \lambda_n(\Phi(B))$.