2017/2018 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et Théorie de la mesure

Feuille d'exercices I.

Espaces métriques

Exercice 1. 1. Rappeler la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, qui sera notée par la suite $\|\cdot\|_2$.

2. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Montrer que, si $(X, \|\cdot\|)$ est un espace normé, alors la fonction $d \colon X \times X \to [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur X.

Exercice 3. Soit X un ensemble. On définit une fonction $d \colon X \times X \to [0, +\infty[$ en posant

$$\forall x, y \in X \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Montrer que d est une distance sur X, appelée *distance discrète*.

Exercice 4. Les applications d_1, d_2, d_3 et d_4, définies de la manière suivante pour $x, y \in \mathbb{R}$, sont-elles des distances sur $\mathbb{R}$?
$d_1(x,y) = (x-y)^2 \qquad d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|} \qquad d_3(x,y) = |2x-y| \qquad d_4(x,y) = |x^2-y^2|$.

Exercice 5. Représenter les boules ouvertes/fermées dans $\mathbb{R}^2$ pour les distances associées aux normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ de centre $(1,0)$ et de rayon 1.

Exercice 6. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. Montrer que les applications d_1 et d_∞ définies pour (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans $X \times Y$ par

$$d_1((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_X(x_1,x_2) + d_Y(y_1,y_2) \quad \text{et}$$

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max(d_X(x_1,x_2), d_Y(y_1,y_2))$$

sont des distances sur $X \times Y$. On appellera d_∞ la *distance produit* de d_1 et d_2.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Rappeler la définition (avec des quantificateurs) de la convergence d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X vers $x \in X$.
2. Que peut-ont dire d'une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de X qui vérifie pour $y \in X$ la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N\ d(y_n, y) \leq \varepsilon\ .$$

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X, qui converge à la fois vers x et x'. Montrer que $x = x'$ (autrement dit, la limite d'une suite convergente est unique).

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique et $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de X qui convergent respectivement vers x, y. Montrer que $d(x_n, y_n)$ converge vers $d(x, y)$.

Exercice 10. Soit (X, d_X) et (Y, d_Y) deux espaces métriques. On munit $X \times Y$ de la distance produit d_∞ définie à l'exercice 6. Montrer qu'une suite $(x_n, y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $X \times Y$ converge vers (x, y) si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y.
Montrer que ce résultat reste vrai si on remplace d_∞ par d_1.

Exercice 11. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$, la norme du sup et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ sont toutes trois équivalentes.

Exercice 12. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f, r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 13.
1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|(x, y)\| = \max(|x + y|, |x - 2y|)$. Montrer qu'il s'agit d'une norme, et représenter sa boule fermée de centre 0 et de rayon 1.
2. Soit N_1, N_2 deux normes sur $\mathbb{R}^n$, et B_1, B_2 leurs boules fermées de centre 0 et de rayon 1. Montrer que :
$$(\forall x \in \mathbb{R}^n\ N_1(x) \leq N_2(x)) \Leftrightarrow B_2 \subseteq B_1\ .$$

Exercice 14. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que l'application δ définie pour tout $x, y \in X$ par
$$\delta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
est une distance sur X.
2. Dans le cas de la distance usuelle d sur $\mathbb{R}$, montrer que d et δ ne sont pas équivalentes.
3. Pour (X, d) espace métrique quelconque, montrer que toute suite (x_n) est convergente pour d si et seulement si elle est convergente pour δ.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que l'application δ définie pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ par $\delta(x, y) = |f(x) - f(y)|$ est une distance sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que la suite $\left(\frac{\sqrt{2}}{n+1}\right)_{n\geq 0}$ converge vers 1 pour la distance δ.

Exercice 16. Soit $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(k) \geq k$ (et en particulier $\varphi(k)$ tend vers $+\infty$!).

Exercice 17. Soit (X, d) un espace métrique. Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite convergente alors toute suite extraite $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 0}$ est convergente. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X.
Supposons d'abord que les suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Montrer que (x_n) est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de (x_{2k}) et (x_{2k+1}) sont égales ?
Montrer que si (x_{2k}), (x_{2k+1}) et (x_{3k}) sont toutes les trois convergentes alors (x_n) est convergente.

Exercice 19.

1. Rappeler la définition d'un ouvert d'un espace métrique utilisant les boules ouvertes.
2. Vérifier qu'une partie A d'un espace métrique est un ouvert si et seulement si
$$\forall a \in A\ \exists r > 0\ \overline{B}(a, r) \subseteq A.$$

Exercice 20.

1. Donner un exemple de deux distances sur $\mathbb{R}$ qui ne définissent pas les mêmes ouverts.
2. Soit X un ensemble et d_1, d_2 deux distances équivalentes sur X. Montrer qu'une partie A de X est un ouvert de (X, d_1) si et seulement si elle est un ouvert de (X, d_2).

Exercice 21.

1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 22. Soit (X, d) un espace métrique.

1. Montrer que toute boule ouverte de X est un ouvert de X et que toute boule fermée de X est un fermé de X.
2. Montrer que tout singleton de X est un fermé.
3. Montrer que toute partie de X est une union de fermés et une intersection d'ouverts.
4. Etant donné $x \in X$ et $r \geq 0$, la sphère de centre x et de rayon r est l'ensemble $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$. Montrer que $S(x, r)$ est un fermé de X.

Exercice 23. Soit A une partie d'un espace métrique (X, d).

1. Rappeler la définition de l'adhérence de A.
2. Montrer que pour tout $x \in X$, on a $x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.

Exercice 24. Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, déterminer $\mathring{\mathbb{Q}}$, d'autres intérieurs...

Exercice 25. Soit (X, d) un espace métrique, et $A \subseteq X$. Montrer que $\overline{X \setminus A} = X \setminus \mathring{A}$ et $\overset{\circ}{\overbrace{X \setminus A}} = X \setminus \overline{A}$.

Exercice 26. Soit (X, d) un espace métrique, $A \subseteq X$ et $x \in X$. Montrer qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x si, et seulement si, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $r > 0$.

Exercice 27. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé (on considère E muni de la distance induite par sa norme). Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$.
3. Les deux propriétés ci-dessus sont elles vraies pour tout espace métrique ?