Feuille d'exercices I.

Espaces vectoriels normés

Exercice 1. 1. Rappeler la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, qui sera notée par la suite $\|\cdot\|_2$.

2. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Montrer que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d\colon E \times E \to [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que pour tous x,$y \in E$, on a :

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
2. $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. (Indication, on pourra majorer $\|2x\|$ et $\|2y\|$.)

Exercice 4. Représenter les boules unités ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$, la norme du sup et la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ sont toutes trois équivalentes.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Pour tout vecteur x de E et réel $r > 0$, on note $B_1(x, r)$ et $B_2(x, r)$ les boules ouvertes de centre x et de rayon r dans (E, N_1) et (E, N_2) respectivement. Soit un réel $k > 0$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in E,\ N_2(x) \leq kN_1(x)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall r \in]0, +\infty[,\ B_1(x, r) \subseteq B_2(x, kr)$;
3. $B_1(0_E, 1) \subseteq B_2(0_E, k)$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x, y) dans $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \quad ,$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\}$$

sont des normes sur $E \times F$. On appelle ces normes, *normes produits.*
Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Rappeler la définition (avec des quantificateurs) de la convergence d'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E vers $x \in E$.

2. Que peut-ont dire d'une suite $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de E qui vérifie pour $y \in E$ la propriété suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \forall n \geq N\ \|y_n - y\| \leq \varepsilon\ .$$

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normée et $(x_n), (y_n)$ deux suites d'éléments de E qui convergent respectivement vers x, y. Montrer que $\|x_n - y_n\|$ converge vers $\|x-y\|$.

Exercice 10. Soit $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer qu'une suite $(x_n, y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $E \times F$ converge vers (x, y) pour l'une des normes produits (introduites dans l'exercice 7) si, et seulement si, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x et $(y_n)_{n\geq 0}$ converge vers y.

Exercice 11. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f, r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 12. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X.
Supposons d'abord que les suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Montrer que (x_n) est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de (x_{2k}) et (x_{2k+1}) sont égales ?
Montrer que si (x_{2k}), (x_{2k+1}) et (x_{3k}) sont toutes les trois convergentes alors (x_n) est convergente.

Exercice 14. Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne.

1. Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes ? fermées ?

   a) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *c)* $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$

   b) $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ *d)* $\left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) : n \in \mathbb{N}^*\right\}$

2. On note $A = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) : x > 0\right\}$. Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}^2$ qui n'est ni ouverte ni fermée.

Exercice 15.

1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.

2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 16. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 17. On considère $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

1. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $[0,1] \cap \mathbb{Q}$.
2. Construire une partie A de $\mathbb{R}$ telle que les ensembles suivants soient deux à deux distincts : A, $\mathring{A}$, $\overline{A}$, $\mathring{\overline{A}}$, $\overline{\mathring{A}}$, $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$, $\overline{\mathring{\overline{A}}}$.

Exercice 18. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.

Exercice 19. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est également un sous-espace vectoriel de E.