Feuille d'exercices I.

Correction partielle.

Exercice 1. cf TD.

Exercice 2. cf TD.

Exercice 3. cf TD.

Exercice 4. cf TD.

Exercice 5. cf TD.

Exercice 6. (Cantor) On se propose de démontrer qu'il n'existe pas une surjection $h : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$. Supposons par l'absurde qu'une telle h existe.

1. Pour montrer qu'il existe un $a \in \Omega$ tel que $h(a) = A$, il suffit de noter que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ (définition d'un ensemble par séparation) donc c'est l'hypothèse de surjectivité de h.
2. Montrons les implications : "$a \notin A \Rightarrow a \in A$" et "$a \in A \Rightarrow a \notin A$".
   Si $a \notin A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$ alors $a \in h(a) = A$ donc $a \in A$.
   De même si $a \in A$ alors par définition $a \notin h(a) = A$ donc $a \notin A$.
3. Conclusion. Par l'absurde, si h existait, soit on aurait $a \in A$ (ce qui mène à la contradiction $a \notin A$, soit on aurait $a \notin A$ (ce qui mène à la contradiction $a \in A$). Dans les deux cas, on a une contradiction, donc l'hypothèse d'existence de h surjective était absurde.

   Petite remarque : cet argument trouvé par Cantor fut surprenant pour ses contemprains, il empèche aussi l'existence d'un "ensemble de tous les ensembles". Il utilise fortement que h est une fonction d'un ensemble vers les propriétés sur cet ensemble, car grâce à h on peut définir la propriété $P_x(y) =$ "$y \in h(x)$". C'est quand on regarde la propriété auto-référentielle $non(P_x(x))$ que l'argument par l'absurde précédent devient possible. On parle aussi d'argument diagonal, et il a bien d'autres applications plus avancées, par exemple pour construire un ensemble non-borélien simple (qui soit la projection d'un ensemble fermé).

Exercice 7.

1. Montrons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. (Indication : on utilisera qu'un ensemble X est a.p.d. (au plus dénombrable) si et seulement si il existe une application surjective $\phi : \mathbb{N} \to X$.)
   Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il serait au plus dénombrable donc on aurait une surjection $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ce qui contredit le lemme de Cantor (exo précédent).

2. Rappelons que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n) : a_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. (Indication : établir une bijection entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et les parties de $\mathbb{N}$ en utilisant les fonctions indicatrices)
   Soit $H : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel $H(h) = h^{-1}(\{1\})$ alors $h = 1_{H(h)}$ et $H(1_A) = A$ donc H est la bijection réciproque de $1. : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la fonction qui a un ensemble associe sa fonction indicatrice : $1.(A) = 1_A$.

Exercice 8. On se propose de prouver que l'intervalle $[0,1)$ est non-dénombrable.

1. On définit par récurrence sur n une application $\psi : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, a \mapsto (a_n)$, de manière suivante. On choisit $a_0 = 0$ et on pose $J_0 = [0, \frac{1}{2})$ si $a \in [0, \frac{1}{2})$ et on choisit $a_0 = 1$ et on pose $J_0(a) = [\frac{1}{2}, 1)$ si $a \in [\frac{1}{2}, 1)$. Si $a \in J_n(a) = [l_n, r_n)$, on choisit
   — $a_{n+1} = 0$ et on pose $J_{n+1}(a) = [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$ si $a \in [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$
   — $a_{n+1} = 1$ et on pose $J_{n+1}(a) = [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$ si $a \in [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$.

   (a) Montrons que ψ est injective. Si $\psi(a) = \psi(b)$ alors $J_n(a) = J_n(b)$ pour tout n. Or, le diamètre $(r_n - l_n) = |J_n(a)| \leq |J_{n-1}(a)|/2 \leq |J_0(a)|/2^n = 1/2^{n+1} \to 0$, Par le théorème des suites adjacentes l_n croissante, r_n décroissante $l_n \leq r_n$ et $(r_n - l_n) \to 0$ donc r_n, l_n convergent vers la même limite l et vu $l_n \leq a < r_n$ donc $l \leq a \leq l$ donc $a = l$ et de même pour $b = l$ donc $a = b$. Comme a, b sont arbitraires, ψ est injective.

   (b) Soit A l'ensemble des suites qui sont constantes égales à 1 à partir d'un certain rang :
   $$A = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, b_n = 1\}.$$
   Montrons que ψ est à valeur dans A^c.
   Par l'absurde si on avait $\psi(a) \in A$, soit n_0 tel que $a_n = 1 \forall n \geq n_0$, donc $a \in \cap_{n\geq n_0} J_n(a)$. On va voir qu'à cause du sens des intervalles ouverts dans la définition, cette intersection est vide. En effet, on a $r_{n+1} = r_n$ pour tout $n \geq n_0$ et on a déjà calculé la longueur, donc $J_n(a) = [r_{n_0}(a) - 1/2^{n+1}, r_{n_0}(a))$. Donc $r_{n_0}(a) - 1/2^{n+1} \leq a < r_{n_0}(a))$ et en passant à la limite on obtient $r_{n_0}(a) \leq a < r_{n_0}(a)$, une contradiction.

   (c) Montrons que l'image $\psi([0,1)) = A^c$. Posons, pour $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^c$, $a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}$ et montrons que $\psi(a) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Vu que les b_k ne sont pas tous égaux à 1 on a $0 \leq a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Donc $a \in [0,1)$ et ψ sera surjective à valeur A^c.
   Tout est basé sur le fait que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$ vu que la suite $(b_k)_{k\geq n+1}$ n'est pas constante égale à 1 donc
   $$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/2^{n+2}}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$
   Donc $a \in [s_n(a), s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}})$ avec $s_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{2^{k+1}}$.
   On montre qu'alors, par récurrence sur n, que $J_n(a) = [s_n(a), s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}})$ et $a_n = b_n$.
   Pour $n = 0$, $a \in [b_0/2, b_0/2 + 1/2)$ donc en examinant les 2 cas $a_0 = b_0$ et $s_0(a) = l_0(a), s_0(a) + \frac{1}{2^1} = r_0(a)$.

En supposant le résultat au rang n, vu que $a \in [s_n(a)+\frac{b_{n+1}(a)}{2^{n+1}}, s_n(a)+\frac{b_{n+1}(a)}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}})$:
— si $b_{n+1}=0$ alors $a_{n+1}=0$ et on a posé $J_{n+1}(a)=[l_n, l_n+\frac{r_n-l_n}{2})=[s_n(a), s_n(a)+\frac{1}{2^{n+2}})$ car $a \in [l_n, l_n+\frac{r_n-l_n}{2})$
— si $b_{n+1}=1$ alors $a_{n+1}=1$ et on a posé $J_{n+1}(a)=[s_n(a)+\frac{1}{2^{n+1}}, s_n(a)+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}})$ car $a \in [l_n+\frac{r_n-l_n}{2}, r_n)$.
Donc, dans les deux cas on a $b_{n+1}=a_{n+1}$ et $J_{n+1}(a)=[s_{n+1}(a), s_{n+1}(a)+\frac{1}{2^{n+2}})$ ce qui était le résultat au rang $n+1$.
On a donc montré $\psi(a)=(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(d) En écrivant $A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec

$$A_n=\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, b_k=1\},$$

On voit que A est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. En effet, on a la bijection $A_n \simeq \{0,1\}^{n-1}$ (par la bijection restreignant aux premières coordonnées, et la bijection réciproque ajoute une infinité de 1 à la fin de la la suite finie) et A_n est donc fini. En plus comme les suites avec n 0 suivies par que des 1 sont distinctes, A est infini, (et a.p.d.) donc dénombrable.

2. Conclusion. Par l'absurde, si on avait $[0,1)$ dénombrable alors A^c qui est en bijection avec lui par ψ serait dénombrable et comme A est dénombrable, on aurait aussi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dénombrable par union ce qui contredit l'exercice précédent. Donc $[0,1)$ n'est pas dénombrable.

Exercice 9. cf TD.

Exercice 10. On se propose de démontrer que tout ouvert non-vide U dans $\mathbb{R}$ s'écrit $U=\bigsqcup\limits_{i\in I} I_i$ où I est dénombrable et chaque I_i est un intervalle ouvert.

Pour chaque $a \in U$ soit V_a l'union de tous les intervalles ouverts contenants a et contenus dans U.

1. Montrer que $V_a, a \in U$, est un intervalle. Un intervalle ouvert est de la forme $]a_v, b_v[$ donc on introduit l'ensemble des bornes d'intervalle intervenant dans la définition de U : $J=\{(a_v,b_v) : a_v < a < b_v,]a_v, b_v[\subset U\}$ donc par définition :

$$V_a=\bigcup_{(a_v,b_v)\in J}]a_v, b_v[\subset U$$

Montrons que $V_a =]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[$.
Le point clef est que $]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, a] = \cup_{(a_v,b_v)\in J}]a_v, a]$ par définition de l'infimum car $x > \inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v$ si et seulement si il existe $(a_v,b_v)\in J$ tel que $x > a_v$.
DOnc avec le résultat correspondant pour le sup et commutation des unions, on a :

$$\begin{aligned}]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[&=]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, a] \cup [a, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[\\ &= (\cup_{(a_v,b_v)\in J}]a_v, a]) \cup (\cup_{(a_v,b_v)\in J}[a, b_v[\\ &= \cup_{(a_v,b_v)\in J}(]a_v, a] \cup [a, b_v[) = V_a \end{aligned}$$

Vous remarquerez qu'on utilise crucialement le point en commun a dans les intervalles pour obtenir ce résultat.

2. Montrons que si a et $b \in U$ alors soit $V_a \cap V_b = \emptyset$ soit $V_a = V_b$. Il faut donc montrer que si $V_a \cap V_b$ est non vide alors $V_a = V_b$.

   On suppose d'abord $b \in V_a$, V_a et un intervalle contenant b et contenu dans U donc par définition de V_b on a $V_a \subset V_b$. Or comme $a \in V_a$ on déduit $a \in V_b$ ce qui est l'hypothèse symétrique qui implique donc $V_b \subset V_a$ et donc $V_a = V_b$.

   Maintenant, si $V_a \cap V_b \neq \emptyset$ il existe $c \in V_a \cap V_b \subset U$, donc par le cas précédent $V_a = V_c = V_b$ d'où l'égalité.

3. Conclure. (Indication : chaque nombre réel peut être approché par des nombres rationnels...)

   Soit $I = \mathbb{Q} \cap U$ qui est au plus dénombrable car contenu dans $\mathbb{Q}$ et en fait dénombrable car il existe un $]a, b[\subset U$ vu que U non-vide (et contient donc un voisinage d'un de ces points) et donc $\mathbb{Q} \cap]a, b[\subset I$ est infini.

   Donc il suffit de voir que $U = \cup_{a \in I} V_a$. Par double inclusion, d'abord chaque $V_a \subset U$ donc par union $\cup_{a \in I} V_a \subset U$. Réciproquement, soit $a \in U$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $V_a \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (il y a un rationnel assez proche de a pour être dans V_a) soit donc $b \in V_a \cap \mathbb{Q}$ alors par le 2 $V_a = V_b$ et $b \in I$ donc $a \in \cup_{b \in I} V_b$. Comme a est arbitraire on déduit $U \subset \cup_{b \in I} V_b$.