Feuille d'exercices I.

Opérations sur les ensembles, dénombrabilité (révisions)

Exercice 1. On travaille avec les éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On désigne par A, B des éléments dans $\mathcal{P}(\Omega)$ (c.à.d. des parties de Ω) et par $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles d'éléments dans $\mathcal{P}(\Omega)$. Montrer les propriétés suivantes.

1. $A \bigcap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$.
2. $A \bigcup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.
3. $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$,
4. $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.
5. $A \setminus (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i)$.
6. $(\bigcup_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B)$.
7. $A \setminus (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i)$.
8. $(\bigcap_{i\in I} A_i) \setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B)$.

Exercice 2. (Image direct, image réciproque) Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$. On suppose que A et $A_i \in \mathcal{P}(X), B_i \in \mathcal{P}(Y)$ et $C \in \mathcal{P}(Z)$. Montrer les propriétés suivantes.

1. $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$.
2. $f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
3. $f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.
4. $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
5. $f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.
6. $f\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. Montrer par un exemple que l'égalité n'est pas vraie en général.
7. Montrer par des exemples qu'en général il n'y a pas aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $f(A)^c$.

Exercice 3. (injectivité, surjectivité) Soit $f : X \to Y$.

1. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est injective ;
   (b) $\forall A \subset X,\ f^{-1}(f(A)) = A$;
   (c) $\forall x \subset X,\ f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (a) f est surjective ;
   (b) $\forall B \subset Y,\ f(f^{-1}(B)) = B$;

(c) $\forall y \subset Y$, $f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 4. (fonctions indicatrices (caractéristiques)) Rappelons que si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ la fonction indicatrice (ou caractéristique) 1_A de A est définie par

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Calculer $1_\emptyset$ et 1_Ω.
2. Pour $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ calculer $1_A^{-1}(B)$.
3. Soit $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$. Calculer en fonction de 1_A et 1_B les fonctions suivantes : 1_{A^c}, $1_{A\cap B}$, $1_{A\cup B}$ et $1_{A\Delta B}$ (dans le cas particulier $A \cap B = \emptyset$ et dans le cas général).
4. Soit (A_n) une suite de $\mathcal{P}(\Omega)$ et soit $A = \bigcup_n A_n$.
   (a) Montrer que la suite (A_n) est croissante si et seulement si la suite (1_{A_n}) est croissante. Montrer que dans ce cas (1_{A_n}) converge vers 1_A.
   (b) Si les A_n sont d.d.d. (deux à deux disjoints), montrer que $1_A = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{A_n}$.

Exercice 5. Soit $(A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)$. On pose

$$\liminf_n A_n = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \text{ et } \limsup_n A_n = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1. Montrer que

$$\liminf_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour n assez grand}\}$$

   et

$$\limsup_n A_n = \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n \text{ pour un nombre infini de n}\}.$$

2. Démontrer les formules :

$$\limsup_n 1_{A_n} = 1_{\limsup A_n}$$

   et

$$\liminf_n 1_{A_n} = 1_{\liminf A_n}.$$

Exercice 6. (Cantor) On se propose de démontrer qu'il n'existe pas une surjection $h : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$. Supposons par l'absurde qu'une telle h existe.

1. Montrer qu'il existe un $a \in \Omega$ tel que $h(a) = A$;
2. Montrer les implications : "$a \notin A \Rightarrow a \in A$" et "$a \in A \Rightarrow a \notin A$" ;
3. Conclure.

Exercice 7. 1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. (Indication : on utilisera qu'un ensemble X est a.p.d. (au plus dénombrable) si et seulement si il existe une application surjective $\phi : \mathbb{N} \to X$.)

2. Rappelons que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n) : a_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. (Indication : établir une bijection entre $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et les fonctions indicatrices sur $\mathbb{N}$.)

Exercice 8. On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ les parties finies de $\mathbb{N}$. Est-ce que $\mathcal{F}(\mathbb{N})$ dénombrable ? (Indication : Est-ce que l'ensemble de nombres premiers infinie ?)

Exercice 9. On se propose de prouver que l'intervalle $[0,1)$ est non-dénombrable.

1. On définit par récurrence sur n une application $\psi : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, a \mapsto (a_n)$, de manière suivante. On choisit $a_0 = 0$ et on pose $J_0 = [0, \frac{1}{2})$ si $a \in [0, \frac{1}{2})$ et on choisit $a_0 = 1$ et on pose $J_0 = [\frac{1}{2}, 1)$ si $a \in [\frac{1}{2}, 1)$. Si $a \in J_n = [l_n, r_n)$, on choisit
   — $a_{n+1} = 0$ et on pose $J_{n+1} = [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$ si $a \in [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$
   — $a_{n+1} = 1$ et on pose $J_{n+1} = [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$ si $a \in [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$.
   (a) Montrer que ψ est injective.
   (b) Soit A l'ensemble des suites qui sont constantes égales à 1 à partir d'un certain rang :
   $$A = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, b_n = 1\}.$$
   Montrer que ψ est à valeur dans A^c.
   (c) Montrer que l'image $\psi([0,1)) = A^c$. (Indication : poser, pour $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^c$, $a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}$ et montrer que $\psi(a) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$).
   (d) En écrivant $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec
   $$A_n = \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, b_k = 1\},$$
   montrer que A est dénombrable.
2. Conclure.

Exercice 10. Parmi les assertions suivantes : lesquelles sont VRAIES et lesquelles sont FAUSSES ? (Prouver les ou réfuter les selon le cas).

1. L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
2. L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
3. $[a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$ est dénombrable.
4. $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. $\mathbb{R}$ est dénombrable.
6. $\mathbb{C}$ est dénombrable.
7. $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

Exercice 11. On se propose de démontrer qu'il existe un $M \subset \mathbb{R}^*$ non-dénombrable tel que si $x, y \in M, x \neq y$, alors $\frac{x}{y}$ est irrationel.

1. On définit la rélation " $\sim$ " sur $\mathbb{R}^*$: $x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$. Montrer que " $\sim$ " est une équivalence.
2. Montrer que le quotient $\mathbb{R}^*/\sim$ est non-dénombrable.
3. Conclure.

Exercice 12. On se propose de démontrer que tout ouvert non-vide U dans $\mathbb{R}$ s'écrit $U = \bigsqcup_{i \in I} I_i$ où I est au plus dénombrable et chaque I_i est un intervalle ouvert non-vide.

Pour chaque $a \in U$ soit V_a l'union des tous les intervalles ouverts contenants a et contenus dans U.

1. Montrer que $V_a, a \in U$, est un intervalle.
2. Montrer que si a et $b \in U$ alors soit $V_a \cap V_b = \emptyset$ soit $V_a = V_b$.
3. Conclure. (Indication : chaque nombre réel peut être approché par des nombres rationnels...)