Feuille d'exercices I.

Correction.

Exercice 1. Il s'agit principalement d'un exercice de "traduction" d'assertions mathématiques.

1. Montrons que $A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$. On a, pour tout A et $\{B_i\}_{i\in I}$:

$$\begin{aligned} & x \in A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \\ \iff & x \in A \text{ et } x \in \bigcup_{i\in I} B_i \\ \iff & x \in A \text{ et } \exists i \in I, x \in B_i \\ \iff & \exists i \in I, x \in A \text{ et } x \in B_i \\ \iff & x \in \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i). \end{aligned}$$

2. Montrons que $A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$. On a, pour tout A et $\{B_i\}_{i\in I}$:

$$\begin{aligned} & x \in A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \\ \iff & x \in A \text{ ou } x \in \bigcap_{i\in I} B_i \\ \iff & x \in A \text{ ou } \forall i \in I, x \in B_i \\ \iff & \forall i \in I, x \in A \text{ ou } x \in B_i \\ \iff & x \in \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i). \end{aligned}$$

3. Montrons que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$. On a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$,

$$\begin{aligned} & x \in \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c \\ \iff & x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \\ \iff & \forall i \in I, x \notin A_i \\ \iff & x \in \bigcap_{i\in I} A_i^c. \end{aligned}$$

4. Montrons que $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$. Il suffit d'appliquer l'égalité précédente pour A_i^c à la place de A_i, ainsi, on a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$,
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i^c\right)^c = \bigcap_{i\in I}(A_i^c)^c = \bigcap_{i\in I} A_i.$$
Par passage au complémentaire de chaque côté de l'égalité, on obtient bien
$$\bigcup_{i\in I} A_i^c = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c.$$
5. Montrons que $A \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i)$. En utilisant l'égalité 3. et le fait que $A \setminus B = A \cap B^c$, on a, pour tout A et $\{B_i\}_{i\in I}$:
$$A \setminus \bigcup_{i\in I} B_i = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right)^c = A \cap \bigcap_{i\in I} B_i^c = \bigcap_{i\in I}(A \cap B_i^c) = \bigcap_{i\in I}(A \setminus B_i).$$
6. Montrons que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B)$. En utilisant l'égalité 1., on a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$ et B :
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B^c = \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B^c) = \bigcup_{i\in I}(A_i \setminus B).$$
7. Montrons que $A \setminus \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i)$. En utilisant les égalités 4. et 1., on a, pour tout A et $\{B_i\}_{i\in I}$:
$$A \setminus \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = A \cap \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)^c = A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i^c\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i^c) = \bigcup_{i\in I}(A \setminus B_i).$$
8. Montrons que $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B)$. On a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$ et B :
$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \setminus B = \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap B^c = \bigcap_{i\in I}(A_i \cap B^c) = \bigcap_{i\in I}(A_i \setminus B).$$

Exercice 2. Il s'agit encore une fois d'une simple traduction des assertions mathématiques et de l'utilisation de propriétés simples.

1. Montrons que $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$. On a, pour tout B,
$$x \in (f^{-1}(B))^c \iff x \notin f^{-1}(B) \iff f(x) \notin B \iff f(x) \in B^c \iff x \in f^{-1}(B^c).$$
2. Montrons que $f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. On a, pour tout $\{B_i\}_{i\in I}$,
$$\begin{aligned} & x \in f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \\ \iff & f(x) \in \bigcup_{i\in I} B_i \\ \iff & \exists i \in I, f(x) \in B_i \\ \iff & \exists i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \\ \iff & x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i). \end{aligned}$$

3. Montrons que $f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$. On a, pour tout $\{B_i\}_{i\in I}$,

$$\begin{aligned}
& x \in f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \\
& \iff f(x) \in \bigcap_{i\in I} B_i \\
& \iff \forall i \in I, f(x) \in B_i \\
& \iff \forall i \in I, x \in f^{-1}(B_i) \\
& \iff x \in \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i).
\end{aligned}$$

4. Montrons que $(g\circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. On a, pour tout C :

$$x \in (g\circ f)^{-1}(C) \iff (g\circ f)(x) \in C \iff f(x) \in g^{-1}(C) \iff x \in f^{-1}(g^{-1}(C)).$$

5. Montrons que $f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$. On a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$:

$$\begin{aligned}
& y \in f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \\
& \iff \exists x \in \bigcup_{i\in I} A_i, y = f(x) \\
& \iff \exists x, \exists i \in I, x \in A_i \text{ et } y = f(x) \\
& \iff \exists i \in I, \exists x, x \in A_i \text{ et } y = f(x) \\
& \iff \exists i \in I, y \in f(A_i) \\
& \iff y \in \bigcup_{i\in I} f(A_i).
\end{aligned}$$

6. Montrons tout d'abord que $f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$. On a, pour tout $\{A_i\}_{i\in I}$:

$$\begin{aligned}
& y \in f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \\
& \iff \exists x \in \bigcap_{i\in I} A_i, y = f(x) \\
& \iff \exists x, \forall i \in I, x \in A_i \text{ et } y = f(x) \\
& \implies \forall i \in I, \exists x \in A_i, y = f(x) \\
& \implies \forall i \in I, y \in f(A_i) \\
& \implies y \in \bigcap_{i\in I} f(A_i).
\end{aligned}$$

Remarque : à la quatrième ligne du raisonnement, il s'agit bien d'une implication, et non d'une équivalence. En effet, le fait qu'il existe un x tel que pour tout $i \in I$ une certaine propriété est satisfaite implique que pour tout $i \in I$, il existera un x

(qui est en fait indépendant de i d'après ce que l'on vient de dire) tel que cette propriété est satisfaite. La réciproque est fausse en générale car dans "$\forall i \in I, \exists x$, le x dépend de i et il n'y aura pas, en général, un x qui vérifiera la propriété pour tout $i \in I$. On retiendra que

$$"\exists x, \forall i \in I \Longrightarrow \forall i \in I, \exists x" \text{ et } "\forall i \in I, \exists x \not\Longleftarrow \exists x, \forall i \in I".$$

Contre-exemple : si $f : \{x_1, x_2, x_2\} \to \{y_1, y_2, y_3\}$ est telle que $f(x_1) = f(x_3) = y_3$ et $f(x_2) = y_2$, et si on pose $A = \{x_1, x_2\}$ et $B = \{x_2, x_3\}$, il est clair que

$$f(A \cap B) = f(\{x_2\}) = \{y_2\} \text{ et } f(A) \cap f(B) = \{y_2, y_3\} \cap \{y_2, y_3\} = \{y_2, y_3\} \neq f(A \cap B).$$

7. En reprenant le même exemple que ci-dessus, on obtient

$$f(A^c) = f(\{x_3\}) = \{y_3\} \neq f(A)^c = \{y_1\}.$$

Donc $f(A^c) \neq f(A)^c$ en général.

Exercice 3. 1. Montrons que $(a) \Longrightarrow (b)$. On suppose que f est injective. Soit $A \subset X$, alors

$$x \in f^{-1}(f(A)) \iff f(x) \in f(A) \iff x \in A$$

car f est injective (et donc tout $f(x)$ a au plus un antécédent).
Montrons que $(b) \Longrightarrow (c)$. C'est évident en appliquant (b) pour $A = \{x\}$.
Montrons que $(c) \Longrightarrow (a)$. On suppose que, pour tout $x \in X$, $f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$. Soit $(x_1, x_2) \in X^2$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$. Alors on a $f^{-1}(f(\{x_1\})) = f^{-1}(f(\{x_2\}))$ et donc $\{x_1\} = \{x_2\}$ d'après notre hypothèse. On en déduit que $x_1 = x_2$ et que f est donc injective.

2. Montrons que $(a) \Longrightarrow (b)$. On suppose que f est surjective. Soit $B \subset Y$, alors on a

$$y \in f(f^{-1}(B)) \iff f^{-1}(\{y\}) \subset f^{-1}(B) \iff y \in B$$

car la surjectivité de f implique l'existence d'antécédent(s), c'est-à-dire $f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ et $f^{-1}(B) \neq \emptyset$.
Montrons que $(b) \Longrightarrow (c)$. C'est évident en appliquant (b) pour $B = \{y\}$.
Montrons que $(c) \Longrightarrow (a)$. Soit $y \in Y$, alors par hypothèse on a que $y = f(f^{-1}(\{y\})) = f(x)$ où $x = f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$ toujours par hypothèse.

Exercice 4. 1. On montre facilement que $1_\emptyset(x) = 0$ et $1_\Omega(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$.

2. Pour calculer $1_A^{-1}(B)$, on distingue les cas suivants :
   — Si $B \cap \{0,1\} = \emptyset$, alors $1_A^{-1}(B) = \emptyset$ car 1_A ne prend que les valeurs 0 et 1.
   — Si $B \cap \{0,1\} \neq \emptyset$, alors on a les trois cas suivants :
      — si $1 \notin B$, alors $1_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega : 1_A(x) = 0\} = A^c$;
      — si $0 \notin B$, alors $1_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega : 1_A(x) = 1\} = A$;
      — si $\{0,1\} \subset B$, alors $1_A^{-1}(B) = \{x \in \Omega : 1_A(x) \in \{0,1\}\} = \Omega$.

3. Il est facile de montrer en écrivant explicitement les fonctions caractéristiques que :
   — $1_{A^c} = 1 - 1_A$;
   — $1_{A \cap B} = 1_A 1_B = \min\{1_A, 1_B\}$;

— $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B - 1_A 1_B = \max\{1_A, 1_B\}$;
— $1_{A\Delta B} = 1_A + 1_B - 2 1_A 1_B$.

4. (a) Soit $(A_n)_n$ une suite croissante, c'est-à-dire que $\forall n$, $A_n \subset A_{n+1}$. Montrons que $(1_{A_n})_n$ est croissante. Soit $x \in \Omega$ et n un entier naturel, alors on a deux cas :
   — si $x \in A_n$, alors par croissante de $(A_n)_n$ on sait que $x \in A_{n+1}$ et ainsi $1_{A_n}(x) = 1_{A_{n+1}}(x) = 1$;
   — si $x \notin A_n$, alors nécessairement $1_{A_n}(x) = 0 \leq 1_{A_{n+1}}(x)$.

   On a donc montré que pour tout $x \in \Omega$ et pour tout n, $1_{A_n}(x) \leq 1_{A_{n+1}}(x)$, ce qui veut dire que $(1_{A_n})_n$ est croissante.
   Supposons maintenant que $(1_{A_n})_n$ est croissante. Soit $x \in A_n$, alors on a $1_{A_n}(x) = 1 \leq 1_{A_{n+1}}(x) \leq 1$ par croissante de la suite $(1_{A_n})_n$. On en déduit que $1_{A_{n+1}}(x) = 1$, ce qui implique que $x \in A_{n+1}$. On a donc $A_n \subset A_{n+1}$.

   Montrons maintenant que si $(A_n)_n$ (et donc $(1_{A_n})_n$) est croissante, alors 1_{A_n} converge vers 1_A quand n tend vers l'infini. Le but est de montrer que :

$$\forall x \in \Omega, \forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, |1_{A_n}(x) - 1_A(x)| < \varepsilon.$$

   Comme les fonctions caractéristiques ont pour valeurs 0 ou 1, cela revient à montrer que

$$\forall x \in \Omega, \exists N > 0, \forall n > N, |1_{A_n}(x) - 1_A(x)| = 0.$$

   Soit $x \in \Omega$, alors si $x \in A$ on sait qu'il existe N tel que $x \in A_n$ pour tout $n > N$ (par croissante de la suite $(A_n)_n$) et donc $1_{A_n}(x) - 1_A(x) = 1 - 1 = 0$. Si au contraire $x \notin A$, alors x n'appartient à aucun des A_n et on a $1_{A_n}(x) - 1_A(x) = 0 - 0 = 0$, et la convergence est démontrée.

   (b) Le résultat se montre facilement par récurrence en utilisant le fait que $1_{A\cup B} = 1_A + 1_B$ si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice 5. 1. On réécrit les formules sous forme d'assertions mathématiques de la façon suivante :

$$x \in \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k \iff \exists n, x \in \bigcap_{k\geq n} A_k \iff \exists n, \forall k \geq n, x \in A_k.$$

Ainsi, $\liminf_n A_n = \{x \in \Omega : x \in A_n \text{ pour } n \text{ assez grand}\}$. De même, on a :

$$x \in \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \forall n, x \in \bigcup_{k\geq n} A_k \iff \forall n, \exists k \geq n, x \in A_k.$$

Ainsi, comme $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathbb{N}$ est infini, on a bien que

$$\limsup_n A_n = \{x \in \Omega : x \in A_k \text{ pour un nombre infini de } k\}.$$

2. Soit $x \in \Omega$, alors on a

— $1_{\limsup_n A_n}(x) = 0 \iff x \notin \limsup_n A_n \iff \exists n, \forall k \geq n, x \notin A_k$. Cette dernière assertion est vraie si et seulement si

$$\limsup_n 1_{A_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \sup_{k\geq n} 1_{A_k}(x) = 0,$$

la fonction indicatrice 1_{A_k} valant zero pour tout $k \geq n$ pour un certain n, et réciproquement. Comme les fonctions indicatrices ont pour valeurs 0 ou 1, on a bien l'égalité $\limsup_n 1_{A_n} = 1_{\limsup_n A_n}$.
Le même raisonnement fonctionne pour la lim inf. En effet, on a

$$1_{\liminf_n A_n}(x) = 0 \iff x \notin \liminf_n A_n \iff \forall n, \exists k \geq n, x \notin A_k,$$

et la dernière assertion est vraie si et seulement si

$$\liminf_n 1_{A_n}(x) = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} 1_{A_k}(x) = 0,$$

l'infimum valant toujours zero pour un certain $k \geq n$, et réciproquement. Encore une fois, ces fonctions ayant pour valeurs 0 ou 1, on obtient bien l'égalité $\liminf_n 1_{A_n} = 1_{\liminf_n A_n}$.

Exercice 6. (Cantor) On se propose de démontrer qu'il n'existe pas une surjection $h : \Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Soit $A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$. Supposons par l'absurde qu'une telle h existe.

1. Pour montrer qu'il existe un $a \in \Omega$ tel que $h(a) = A$, il suffit de noter que $A \in \mathcal{P}(\Omega)$. Ainsi, par surjectivité de h, il existe $a \in \Omega$ tel que $h(a) = A$.
2. Montrons les implications : "$a \notin A \Rightarrow a \in A$" et "$a \in A \Rightarrow a \notin A$".
   Si $a \notin A = \{x \in \Omega : x \notin h(x)\}$ alors $a \in h(a) = A$ donc $a \in A$.
   De même si $a \in A$ alors par définition $a \notin h(a) = A$ donc $a \notin A$.
3. Conclusion. Par l'absurde, si h existait, soit on aurait $a \in A$ (ce qui mène à la contradiction $a \notin A$, soit on aurait $a \notin A$ (ce qui mène à la contradiction $a \in A$). Dans les deux cas, on a une contradiction, donc l'hypothèse d'existence de h surjective était absurde, ce qui veut dire qu'une telle surjection n'existe pas.
   <u>Petite remarque :</u> cet argument trouvé par Cantor fut surprenant pour ses contemprains, il empèche aussi l'existence d'un "ensemble de tous les ensembles". Il utilise fortement que h est une fonction d'un ensemble vers les propriétés sur cet ensemble, car grâce à h on peut définir la propriété $P_x(y)$ = "$y \in h(x)$". C'est quand on regarde la propriété auto-référentielle non($P_x(x)$) que l'argument par l'absurde précédent devient possible. On parle aussi d'argument diagonal, et il a bien d'autres applications plus avancées, par exemple pour construire un ensemble non-borélien simple (qui soit la projection d'un ensemble fermé).

Exercice 7. 1. Montrons que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable si et seulement si il existe une application surjective $\phi : \mathbb{N} \to X$.
Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il serait au plus dénombrable donc on aurait une surjection $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ce qui contredit le lemme de Cantor (cf. Exercice 6).

2. Rappelons que $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n) : a_n \in \{0,1\}\}$. Montrer que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable.
   Soit $H : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tel $H(h) = h^{-1}(\{1\})$ alors $h = 1_{H(h)}$ et $H(1_A) = A$ donc H est la bijection réciproque de $1. : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ la fonction qui a un ensemble associe sa fonction indicatrice : $1.(A) = 1_A$. Comme $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable d'après la question précédente, il en va de même pour $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 8. On voit facilement que l'ensemble $\mathcal{P}$ de nombre premier et infini. En effet, sinon et $p_1, \cdots, p_n$ sont tous nombre premier alors $p = p_1 \cdots p_n + 1$ est premier et $p > p_i$ pour tout i. Absurd. D'où $P = \{p_i : i \in \mathbb{N}\}$ où p_i son deux à deux differents. Donc, il suffit de montrer que les sous-ensembles finis de P est une famille dénombrable. A chaque sous-ensemble fini A de P on associe le produit des éléments de A. Puisque la décompostion d'un entier positif en produit de nombres premiers est unique, on obtient une injection de P dans $\mathbb{N}$. Mais $\mathbb{N}$ est dénombrable. Donc, P est aussi dénombrable.

Exercice 9. On se propose de prouver que l'intervalle $[0,1)$ est non-dénombrable.

1. On définit par récurrence sur n une application $\psi : [0,1) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}, a \mapsto (a_n)$, de manière suivante. On choisit $a_0 = 0$ et on pose $J_0 = [0, \frac{1}{2})$ si $a \in [0, \frac{1}{2})$ et on choisit $a_0 = 1$ et on pose $J_0(a) = [\frac{1}{2}, 1)$ si $a \in [\frac{1}{2}, 1)$. Si $a \in J_n(a) = [l_n, r_n)$, on choisit
   — $a_{n+1} = 0$ et on pose $J_{n+1}(a) = [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$ si $a \in [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$
   — $a_{n+1} = 1$ et on pose $J_{n+1}(a) = [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$ si $a \in [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$.

   (a) Montrons que ψ est injective. Si $\psi(a) = \psi(b)$ alors $J_n(a) = J_n(b)$ pour tout n. Or, le diamètre $(r_n - l_n) = |J_n(a)| \leq |J_{n-1}(a)|/2 \leq |J_0(a)|/2^n = 1/2^{n+1} \to 0$, Par le théorème des suites adjacentes, on a l_n croissante, r_n décroissante $l_n \leq r_n$ et $(r_n - l_n) \to 0$ donc r_n, l_n convergent vers la même limite l. Comme on a $l_n \leq a < r_n$, cela implique que $l \leq a \leq l$ et donc $a = l$, et de même pour $b = l$. On a donc $a = b$. Comme a, b sont arbitraires, ψ est injective.

   (b) Soit A l'ensemble des suites qui sont constantes égales à 1 à partir d'un certain rang :
   $$A = \{(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, b_n = 1\}.$$
   Montrons que ψ est à valeur dans A^c.
   Par l'absurde si on avait $\psi(a) \in A$, soit n_0 tel que $a_n = 1, \forall n \geq n_0$, donc $a \in \cap_{n \geq n_0} J_n(a)$. On va voir qu'à cause du sens des intervalles ouverts dans la définition, cette intersection est vide. En effet, on a $r_{n+1} = r_n$ pour tout $n \geq n_0$ et on a déjà calculé la longueur, donc $J_n(a) = [r_{n_0}(a) - 1/2^{n+1}, r_{n_0}(a))$. Donc $r_{n_0}(a) - 1/2^{n+1} \leq a < r_{n_0}(a))$ et en passant à la limite quand $n \to +\infty$ on obtient $r_{n_0}(a) \leq a < r_{n_0}(a)$, une contradiction.

   (c) Montrons que l'image $\psi([0,1)) = A^c$. Posons, pour $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^c$, $a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}}$ et montrons que $\psi(a) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Vu que les b_k ne sont pas tous égaux à 1 on a $0 \leq a = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$. Donc $a \in [0,1)$ et ψ sera surjective à valeur A^c.
   Tout est basé sur le fait que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}}$ vu que la suite $(b_k)_{k \geq n+1}$ n'est pas constante égale à 1 donc
   $$0 \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{b_k}{2^{k+1}} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1/2^{n+2}}{1-1/2} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Donc $a \in [s_n(a), s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}})$ avec $s_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{2^{k+1}}$.
On montre qu'alors, par récurrence sur n, que $J_n(a) = [s_n(a), s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}})$ et $a_n = b_n$.
Pour $n = 0$, $a \in [b_0/2, b_0/2 + 1/2)$ donc en examinant les 2 cas $a_0 = b_0$ et $s_0(a) = l_0(a), s_0(a) + \frac{1}{2^1} = r_0(a)$.
En supposant le résultat au rang n, vu que $a \in [s_n(a) + \frac{b_{n+1}(a)}{2^{n+1}}, s_n(a) + \frac{b_{n+1}(a)}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}})$:
- si $b_{n+1} = 0$ alors $a_{n+1} = 0$ et on a posé $J_{n+1}(a) = [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2}) = [s_n(a), s_n(a) + \frac{1}{2^{n+2}})$ car $a \in [l_n, l_n + \frac{r_n - l_n}{2})$
- si $b_{n+1} = 1$ alors $a_{n+1} = 1$ et on a posé $J_{n+1}(a) = [s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}}, s_n(a) + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}})$ car $a \in [l_n + \frac{r_n - l_n}{2}, r_n)$.

Donc, dans les deux cas on a $b_{n+1} = a_{n+1}$ et $J_{n+1}(a) = [s_{n+1}(a), s_{n+1}(a) + \frac{1}{2^{n+2}})$ ce qui était le résultat au rang $n+1$.
On a donc montré $\psi(a) = (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

(d) En écrivant $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ avec

$$A_n = \{(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \forall k \geq n, b_k = 1\},$$

On voit que A est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis. En effet, on a la bijection $A_n \simeq \{0,1\}^{n-1}$ (par la bijection restreignant aux premières coordonnées, et la bijection réciproque ajoute une infinité de 1 à la fin de la la suite finie) et A_n est donc fini. En plus comme les suites avec n 0 suivies par que des 1 sont distinctes, A est infini, (et a.p.d.) donc dénombrable.

2. Conclusion. Par l'absurde, si on avait $[0,1)$ dénombrable alors A^c qui est en bijection avec lui par ψ serait dénombrable et comme A est dénombrable, on aurait aussi $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dénombrable par union ce qui contredit l'exercice précédent. Donc $[0,1)$ n'est pas dénombrable.

Exercice 10. Les réponses sont les suivantes :

1. VRAI. L'ensemble des nombres premiers est inclus dans $\mathbb{N}$ qui est dénombrable, donc il est lui-même dénombrable.
2. VRAI. L'ensemble des nombres pairs est inclus dans $\mathbb{Z}$ qui est dénombrable, donc il est lui-même dénombrable.
3. FAUX. On sait d'après l'Exercice 8 que l'intervalle $[0,1]$ n'est pas dénombrable. On peut construire la bijection $f(x) = bx + (1-a)x$ qui envoie $[0,1]$ sur $[a,b]$ et on en déduit que n'importe quel intervalle $[a,b]$ est non-dénombrable.
4. VRAI. On peut se référer à cette page web pour une construction d'une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}_+ \backslash \{0\}$, ce qui donne automatiquement une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ et permet de conclure que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
5. FAUX. Comme $[0,1] \subset \mathbb{R}$ est non-dénombrable (cf Exercice 8), on en déduit immédiatement que c'est aussi le cas pour $\mathbb{R}$.
6. FAUX. Comme $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ est non-dénombrable, on en déduit immédiatement que c'est aussi le cas pour $\mathbb{C}$.

7. FAUX. Comme $\mathbb{N} \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ et que $\mathbb{C}$ est non-dénombrable, on en déduit immédiatement que c'est aussi le cas pour $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

Exercice 11. 1. Montrons que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^*$. En effet :
   - (Réflexivité) pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $\frac{x}{x} = 1 \in \mathbb{Q}$, et donc $x \sim x$;
   - (Symétrie) pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ on a $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q} \iff \frac{y}{x} \in \mathbb{Q}$, et donc $x \sim y \Longrightarrow y \sim x$;
   - (Transitivité) pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, tels que $x \sim y$ et $y \sim z$, alors $\frac{x}{y}, \frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$ et ainsi $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} \times \frac{y}{z} \in \mathbb{Q}$ et donc $x \sim z$.

2. $\mathbb{R}^*$ étant non-dénombrable et quotienté par une relation faisant intervenir multiplicativement un ensemble dénombrable (ici $\mathbb{Q}$), on a que $\mathbb{R}^*/\sim$
3. On choisit M où l'on prend un unique représentant pour la relation d'équivalence $\sim$ pour chaque réel. M est non-dénombrable et tel que, dès que $x, y \in M$ tels que $x \neq y$, on a nécessairement que $\frac{x}{y} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ car sinon x et y seraient dans la même classe d'équivalence pour la relation $\sim$, ce qui est impossible.

Exercice 12. On se propose de démontrer que tout ouvert non-vide U dans $\mathbb{R}$ s'écrit $U = \bigsqcup_{i \in I} I_i$ où I est dénombrable et chaque I_i est un intervalle ouvert.

Pour chaque $a \in U$ soit V_a l'union de tous les intervalles ouverts contenants a et contenus dans U.

1. Montrer que $V_a, a \in U$, est un intervalle. Un intervalle ouvert est de la forme $]a_v, b_v[$ donc on introduit l'ensemble des bornes d'intervalles intervenant dans la définition de U : $J = \{(a_v, b_v) : a_v < a < b_v,]a_v, b_v[\subset U\}$, donc par définition :
$$V_a = \bigcup_{(a_v,b_v) \in J}]a_v, b_v[\subset U$$
.

   Montrons que $V_a =]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[$.

   Le point clef est que $]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, a] = \cup_{(a_v,b_v)\in J}]a_v, a]$ par définition de l'infimum car $x > \inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v$ si et seulement si il existe $(a_v, b_v) \in J$ tel que $x > a_v$.

   Donc avec le résultat correspondant pour le sup et commutation des unions, on a :
$$\begin{aligned}]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[&=]\inf_{(a_v,b_v)\in J} a_v, a] \cup [a, \sup_{(a_v,b_v)\in J} b_v[\\ &= (\cup_{(a_v,b_v)\in J}]a_v, a]) \cup (\cup_{(a_v,b_v)\in J} [a, b_v[\\ &= \cup_{(a_v,b_v)\in J} (]a_v, a] \cup [a, b_v[) = V_a \end{aligned}$$

   Vous remarquerez qu'on utilise crucialement le point en commun a dans les intervalles pour obtenir ce résultat.

2. Montrons que si a et $b \in U$ alors soit $V_a \cap V_b = \emptyset$ soit $V_a = V_b$. Il faut donc montrer que si $V_a \cap V_b$ est non vide alors $V_a = V_b$.

   On suppose d'abord $b \in V_a$, V_a et un intervalle contenant b et contenu dans U donc par définition de V_b on a $V_a \subset V_b$. Or comme $a \in V_a$ on déduit $a \in V_b$ ce qui est l'hypothèse symétrique qui implique donc $V_b \subset V_a$ et donc $V_a = V_b$.

   Maintenant, si $V_a \cap V_b \neq \emptyset$ il existe $c \in V_a \cap V_b \subset U$, donc par le cas précédent $V_a = V_c = V_b$ d'où l'égalité.

3. Conclure. (Indication : chaque nombre réel peut être approché par des nombres rationnels...)

   Soit $I = \mathbb{Q} \cap U$ qui est au plus dénombrable car contenu dans $\mathbb{Q}$ et en fait dénombrable car il existe un $]a, b[\subset U$ vu que U non-vide (et contient donc un voisinage d'un de ces points) et donc $\mathbb{Q}\cap]a, b[\subset I$ est infini.

   Donc il suffit de voir que $U = \cup_{a \in I} V_a$. Par double inclusion, on a pour tout V_a, $V_a \subset U$ ce qui implique que $\cup_{a \in I} V_a \subset U$. Réciproquement, soit $a \in U$, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, $V_a \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ (il y a un rationnel assez proche de a pour être dans V_a) soit donc $b \in V_a \cap \mathbb{Q}$ alors par la question 2. $V_a = V_b$ et $b \in I$ donc $a \in \cup_{b \in I} V_b$. Comme a est arbitraire on déduit $U \subset \cup_{b \in I} V_b$.