Feuille d'exercices II.

Fonctions continues

Exercice 1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists \delta > 0\ \forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Exercice 3. Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 5. Soit X, Y deux ensembles, $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer que, pour tout $A, B \subseteq Y$ on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 6. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ A \subset E,\ \ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x,y) \mapsto x + y$ et $(x,y) \mapsto xy$ sont continues.

Exercice 9. Soit (X, d) un espace métrique et $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 10. Soit (X, d_X), (Y, d_Y) et (Z, d_Z) trois espaces métriques, ainsi que $f\colon Y \to Z$ et $g\colon X \to Y$ deux fonctions uniformément continues. Montrer que $f \circ g\colon X \to Z$ est uniformément continue.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n, puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-ele uniforme ? f est-elle continue ?

Exercice 12. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique.

1. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$. Pour $f \in E$, on pose
$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \ .$$
Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E, et que, étant donnée une suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence
$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ .$$
Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.
2. (a) Soit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ défini pour $x, y \in \mathbb{R}$ par
$$d(x, y) = \min(1, |x - y|).$$
Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}$.
   (b) On s'intéresse maintenant à l'espace vectoriel F formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ et on pose pour deux fonctions f et g de F,
$$d'(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x))\colon x \in X\} \ .$$
Montrer que d' définit une distance sur F.
   (c) Montrer que F muni cette distance vérifie les mêmes propriétés que celles de E ci-dessus.

Exercice 14. Soit (X, d), (Y, D) deux espaces métriques, et $f\colon X \to Y$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq X$ on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie en général ?
2. On suppose en plus que f est surjective. Montrer que si A est dense dans X alors $f(A)$ est dense dans Y.