Feuille d'exercices II.

Fonctions continues

Exercice 1. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Pour chacun des énoncés suivants, déterminer toutes les fonctions $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui le satisfont :

1. $\exists\delta > 0\ \forall\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
2. $\forall\varepsilon > 0\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall x' \in \mathbb{R}\ \exists\delta > 0\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Exercice 3. Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 4. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 5. Soit X, Y deux ensembles, $f\colon X \to Y$ une fonction. Montrer que, pour tout $A, B \subseteq Y$ on a $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ et $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Exercice 6. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1] \cup [-2,1])$ et $f([-3,-1] \cap [-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2] \cup [1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2] \cap [1,+\infty[)$.

Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une application, $A, A' \subset E$ et $B, B' \subset F$.

1. Simplifier $f(f^{-1}(f(A)))$ et $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$.
2. Montrer que $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$.
3. A quelle condition sur f a-t-on : $\forall\ A \subset E,\ f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$?

Exercice 8. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.

Exercice 9. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g\colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 10. Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n, puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-ele uniforme ? f est-elle continue ?

Exercice 12. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 13. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.
Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \ .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, et $f\colon E \to F$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq E$ on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie en général ?
2. On suppose de plus que f est surjective. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 15. (Applications linéaires) Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E vers F. Vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.
4. $\exists K > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq K\|x\|$.
5. f est lipschitzienne.
6. f est uniformément continue.

On note $\mathcal{L}_c(E,F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues. Montrer que l'application $|||\cdot|||$ définie pour $f \in \mathcal{L}_c(E,F)$ par

$$|||f||| = \sup\{\|f(x)\|\colon x \in \bar{B}(0,1)\}$$

est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$.

Exercice 16. Soit E l'espace vectoriel normé $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. On considère l'application $\mu : E \to E$ définie par

$$\mu(f)(x) = \int_0^x f(t)dt \text{ pour } f \in E \text{ et } x \in [0,1].$$

1. Montrer que μ est bien définie que que μ est une application linéaire continue.
2. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$f_n(t) = n(1-t)^{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } t \in [0,1].$$

   Pour chaque $n \geq 1$, calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\mu(f_n)\|_1$.
3. En déduire la norme de μ.