

Feuille d'exercices II.

Clans, tribus, classes monotones, fonctions mesurables

Exercice 1. Soit \mathcal{C} un clan.

1. Si $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$ alors $\bigcap_i A_i \in \mathcal{C}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

Exercice 2. 1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu ;

2. Le sous-ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un clan et une tribu, appelée clan ou tribu triviale.
3. Si Ω est fini alors chaque clan sur Ω est une tribu.
4. $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1, 2\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{1\}, \{0, 2\}\}$. Alors \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 sont des tribus mais $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ n'est pas une tribu (car $\{0, 1\} \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$).

Exercice 3. Soit \mathcal{T} une tribu et (A_n) une suite dans \mathcal{T} . Alors $\bigcap_i A_i \in \mathcal{T}$.

Exercice 4. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si Ω est dénombrable alors chaque tribu sur Ω est a.p.d.
2. Une partie \mathcal{T} de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie :
 - (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$;
 - (b) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$;
 - (c) $A_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Exercice 5. Soient (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ où $\mathcal{E}^c = \{A^c : A \in \mathcal{E}\}$.

Exercice 6. Montrer que $\mathcal{T}(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω (c'est à dire les A_i sont deux à deux disjoints et leur union est Ω). Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{\bigcup_{i \in J} A_i : J \subset I\}$.

Exercice 8. Si Ω est dénombrable, montrer que $\mathcal{T}(\{\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)\}) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 9. 1. Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ trouver le clan, la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$.

2. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ trouver le clan, la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
3. Trouvez une classe monotone qui n'est pas une tribu.

Exercice 10. Déterminer les tribus engendrées dans Ω par les familles \mathcal{E} suivantes :

1. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\{\mathbb{Z}\}\}$;

2. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \dots\}$.

Exercice 11. On travaille avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert ou un fermé est un borélien.
2. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
3. Un intervalle est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2, 3] \cap \mathbb{Q}$ est un borélien de \mathbb{R} .
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \cos(\tan(x))\}$ est un borélien de \mathbb{R} .
3. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et si $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}\left(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{T}\left(\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}\right).$$

Exercice 14. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable. Vérifier que $A \subset \Omega$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice 1_A est borélienne.

Exercice 15. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable. Décrire les fonctions mesurables de (Ω, \mathcal{T}) dans \mathbb{R} dans les cas suivants.

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$;
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 16. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
2. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ est mesurable et si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne étagée alors $g \circ f$ est étagée.
3. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé alors f est mesurable.
4. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est borélienne.
5. La fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $|f|$ est mesurable.

Exercice 17. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :

1. Pour tout $a \leq b$, $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \leq a\}) \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \geq a\}) \in \mathcal{T}$.

Exercices plus difficiles.

- Exercice 18.**
1. Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.
 2. Ce résultat est faux pour une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ soit \mathcal{T}_n la tribu engendrée par $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$. Montrer que \mathcal{T}_n est une suite croissante de tribus sur \mathbb{N} mais que $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ a.p.d. ou } A^c \text{ a.p.d.}\}.$$

1. Montrer que \mathcal{T} est une tribu.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

- Exercice 20.**
1. Chaque tribu est une classe monotone.
 2. Soit \mathcal{A} une tribu (resp. un clan, resp. une classe monotone) sur Ω et soit $X \subset \Omega$. Alors $\mathcal{A}_X = \{A \cap X : A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu (resp. un clan, resp. une classe monotone) sur X appelée la tribu induite (resp. le clan induit, resp. la classe monotone induite) par \mathcal{A} sur X .
 3. Si $X \in \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A}_X = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X\}$.

Exercice 21. Montrer les assertions suivantes :

1. L'ensemble \mathcal{C}_1 des unions finies d'intervalles de \mathbb{R} est un clan. De même, si on remplace \mathbb{R} par un intervalle I et on considère les unions finies d'intervalles contenus dans I . Encore plus généralement, si on remplace I par $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ alors $\{A \cap X : A \in \mathcal{C}_1\}$ est un clan sur X (le clan induit par \mathcal{C}_1).
2. Rappelons qu'un pavé (connexe) de \mathbb{R}^n est un ensemble de la forme $P = I_1 \times \dots \times I_n$ où chaque I_k est un . L'ensemble \mathcal{C}_n des unions finies de pavés de \mathbb{R}^n est un clan.
3. Tout élément de \mathcal{C}_n est union finie de pavés d.d.d.
4. Est-ce que \mathcal{C}_1 est une tribu ? La même question pour \mathcal{C}_n , $n \geq 2$.

- Exercice 22.**
1. Soit Ω un ensemble infini et \mathcal{C} la famille de sous-ensembles de Ω finis ou de compléments finis. Alors \mathcal{C} est un clan qui n'est pas une tribu ;
 2. Soit Ω un espace topologique et \mathcal{C} l'ensemble des ouverts (resp. des fermés) de Ω . Est-ce que \mathcal{C} est un clan ? une tribu ?

Exercice 23. Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$.
3. En déduire que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{C}(\mathcal{E})$.
4. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Exercice 24. Soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. telle que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

(Indication : Montrer que $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{E} \text{ a.p.d. tel que } B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})\}$ est une tribu qui contient \mathcal{E} .)

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que pour tout $a < b$, $f^{-1}([a, b])$ est un intervalle.
2. Montrer que f est borélienne. (Indication : utiliser l'exercice 17)

Exercice 26. (*Exemple d'un ensemble non-mesurable*) Si $x, y \in [0, 1]$ on écrit $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.

Donc, on peut présenter $[0, 1]$ comme union des classes d'équivalence d.d.d. : $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$. Puis, pour chaque $i \in I$ on choisit un élément et un seul $x_i \in C_i$ et on pose $A = \{x_i : i \in I\}$. Posons $A_q = q + A, \forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

2. Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.
3. Montrer que $[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q \subset [-1, 2]$.
4. Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . En supposant A borélien montrer que $\lambda(A_q) = \lambda(A)$.
5. En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$.
6. Conclure que A ne pourrait pas être borélien.