

Feuille d'exercices II.

Espaces métriques, espaces normés

Exercice 1. 1. Rappeler la définition de la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n , qui sera notée par la suite $\|\cdot\|_2$.

2. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.
Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur \mathbb{R}^n .

Exercice 2. Montrer que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E .

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a :

- $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
- $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. (Indication, on pourra majorer $\|2x\|$ et $\|2y\|$.)

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x, y) dans $E \times F$ par

$$\begin{aligned}\|(x, y)\|_1 &= \|x\| + \|y\|' \quad , \\ \|(x, y)\|_2 &= \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et} \\ \|(x, y)\|_\infty &= \max\{\|x\|, \|y\|'\}\end{aligned}$$

sont des normes sur $E \times F$. On appelle $\|\cdot\|_\infty$, *norme produit*.
Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 5. Représenter les boules unités ouvertes dans \mathbb{R}^2 pour les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$, la norme du sup et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^n sont toutes trois équivalentes.

Exercice 7. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E . Pour tout vecteur x de E et réel $r > 0$, on note $B_1(x, r)$ et $B_2(x, r)$ les boules ouvertes de centre x et de rayon r dans (E, N_1) et (E, N_2) respectivement. Soit un réel $k > 0$.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\forall x \in E, N_2(x) \leq kN_1(x)$;
- $\forall x \in E, \forall r \in]0, +\infty[, B_1(x, r) \subseteq B_2(x, kr)$;
- $B_1(0_E, 1) \subseteq B_2(0_E, k)$.

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . Montrer que \overline{F} est également un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 9. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f, r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E .
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 10. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^n |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 11. Soit (X, d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X .

Supposons d'abord que les suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Montrer que (x_n) est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de (x_{2k}) et (x_{2k+1}) sont égales ?

Montrer que si (x_{2k}) , (x_{2k+1}) et (x_{3k}) sont toutes les trois convergentes alors (x_n) est convergente.

- Exercice 12.**
1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
 2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 13. (★) Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0, 1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est la boule ouverte $B(a, r)$.
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$.

Exercice 15. (★)

1. Montrer que chaque espace métrique est un espace topologique.
2. Soit $\mathcal{U} = \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ est fini}\}$.
 - (a) Montrer que \mathcal{U} est la famille des ouverts d'une topologie sur \mathbb{R} . (C'est la *topologie de Zariski sur \mathbb{R}* .)
 - (b) Montrer que la topologie de Zariski sur \mathbb{R} ne provient pas d'une métrique (ou norme) sur \mathbb{R} . (Indication : On pourra montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski n'est jamais un singleton $\{a\}$, ou que l'intersection de deux ouverts de Zariski est toujours non-vide.)

Fonctions continues

Exercice 16. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 17. Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 18. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 19. On munit \mathbb{R}^2 de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et \mathbb{R} de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto x + y$ et $(x, y) \mapsto xy$ sont continues.

Exercice 20. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f + g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 21. Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 22. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n , puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme? f est-elle continue?

Exercice 23. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 24. Soit X une partie non vide de \mathbb{R}^n . On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.

Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|: x \in X\} .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E .
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0 .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E .

Exercice 25. Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, et $f: E \rightarrow F$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq E$ on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie en général?
2. On suppose de plus que f est surjective. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F .

Exercice 26. (Applications linéaires continues) Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E vers F . Vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E .
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}(0, 1)$.
4. $\exists K > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$.
5. f est lipschitzienne.
6. f est uniformément continue.

On note $L(E, F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues. Montrer que l'application $\|f\|$ définie pour $f \in L(E, F)$ par

$$\|f\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in \bar{B}(0, 1)\}$$

est une norme sur $L(E, F)$.

Compactité

Exercice 27. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans \mathbb{R}^2 :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^4 = 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = x^3\},$$

$$C = \{(\cos t, \sin t) : t \in [0, 1]\}, \quad D = \{(\cos t, \sin t) : t \in]0, 1]\}.$$

Exercice 28. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la boule fermée $\bar{B}(0, 1)$ n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 29. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $\bar{B}(0, r)$.

Exercice 30. On se place dans \mathbb{R}^n muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de \mathbb{R}^n . Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}.$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A) \leq d(y, A) + \|y - x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de \mathbb{R}^n . Montrer que dans ce cas,

$$d(x, F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$

4. Pour une partie non vide B de \mathbb{R}^n , on définit

$$d(A, B) = \inf\{\|b - a\| : a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que $d(A, B) = \inf\{d(a, B) : a \in A\}$.

5. Soit K un compact non vide de \mathbb{R}^n . Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que

$$d(K, F) = \|b - a\|.$$

6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ de \mathbb{R}^2 .)

Exercice 31. Soit X une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, et $f: X \rightarrow X$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in X \quad x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $\|f(a) - a\| = \min\{\|f(x) - x\| : x \in X\}$).

Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout x, y ?

Exercice 32. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

(Indication : utiliser la propriété de Borel-Lebesgue caractérisant la compacité en terme de recouvrements ouverts)

Exercice 33. Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X telle que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.