Feuille d'exercices II.

Correction très partielle

Exercice 13. **($\star$)** Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$.
   Montrons que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   -Méthode 1 : Soit $f \in A$, il faut trouver une boule $B(f,\varepsilon) \subset A$ (pour montrer que A est un voisinage de chacun de ses points). Pour cela, comme f est continue, elle atteint son minimum sur $[0,1]$, disons en a donc $f(a) = \varepsilon > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$:$f(x) \geq f(a) = \varepsilon$.
   Soit $g \in B(f,\varepsilon)$, on a $(g-f) \geq -||f-g||_\infty$, donc $g \geq f - ||f-g||_\infty > f - \varepsilon \geq 0$, donc $g(x) > 0$ c'est à dire $g \in A$. On a donc déduit $B(f,\varepsilon) \subset A$.
   -Méthode 2 : On montre que A^c est fermé. Soit f_n une suite de fonctions de A^c avec $||f_n - f||_\infty \to 0$, donc il existe $x_n \in [0,1]$, tel que $f_n(x_n) \leq 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $x_{n_k} \to x$. On a par inégalité triangulaire, définition de la norme infinie, et continuité de f :
   $$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| \leq ||f_{n_k} - f||_\infty + |f(x_{n_k}) - f(x)| \to_{k\to\infty} 0$$
   En passant à la limite dans l'inégalité $f_{n_k}(x_{n_k}) \leq 0$, on obtient $f(x) \leq 0$ et donc $f \in A^c$. A^c est donc fermé.
   -On veut maintenant montrer que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$. En fait, on va montrer que l'intérieur de A est vide. (le fait que l'intérieur de A est non-vide pour la norme $||.||_\infty$ caractérise même les normes équivalentes à des normes du type sup, mais c'est un résultat plus dur).
   On prend donc $f \in A$ et on souhaite montrer que $f \in \overline{A^c} = (Int(A))^c$. Considérons la fonction (triangle autour de 0) $g_n(x) = \max(1 - nx, 0)$ elle vaut 0 pour $x \geq 1/n$ et $g_n(0) = 1$. Par un calcul d'intégrale $||g_n||_1 = 1/2n$ (aire d'un triangle de hauteur 1 et de base 1/n).
   Mais $f_n = f - (f(0)+1)g_n$ vérifie $f(0) - f(0) - 1 = -1 < 0$ donc $f_n \in A^c$. Mais $||f_n - f||_1 = |(f(0)+1)|||g_n||_1 \to 0$ donc $f \in \overline{A^c}$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$.
   Montrons que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   Méthode 1 : On remarque que $B^c = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\} = A \cup -A$ car une fonction continue à valeur dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas ni positive ni négative doit s'annuler par le théorème des valeurs intermédiaires. $S(f) = -f$ est une isométrie linéaire, donc S est continue Donc $B^c = A \cap S^{-1}(A)$ est l'intersection de deux ouvert (le deuxième par image inverse d'un ouvert par une application continue. COmme B^c est ouvert, on a B fermé.
   Méthode 2 : On raisonne comme dans la méthode 2 pour voir que A^c est fermé (ce qui marche même pour les fonctions à valeur complexe, contrairement à la méthode 1).

Soit f_n une suite de fonctions de B avec $||f_n - f||_\infty \to 0$, donc il existe $x_n \in [0,1]$, tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $x_{n_k} \to x$. On a par inégalité triangulaire, définition de la norme infinie, et continuité de f :

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| \leq ||f_{n_k} - f||_\infty + |f(x_{n_k}) - f(x)| \to_{k\to\infty} 0$$

En passant à la limite dans l'égalité $f_{n_k}(x_{n_k}) = 0$, on obtient $f(x) = 0$ et donc $f \in B$. B est donc fermé.

Exercice 24. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.
Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\}\ .$$

1. Vérifions que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E. On peut le montrer comme sur $C^0(X,\mathbb{R})$ dans la deuxième partie du cours. Autre méthode : Si on munit X de la tribu $\mathcal{P}(X)$ pour laquelle toutes les fonctions sont mesurables (et ν la mesure de comptage) alors $E = L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$. En effet, $\nu(A) = 0$ implique $A = \emptyset$, donc $|f(x)| \leq M$, ν-presque partout veut dire partout. $||f||_\infty$ est la norme usuelle de $L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$, on peut appliquer le cours (ou reprendre la preuve).
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0\ .$$

   Si (f_n) converge uniformément vers f, cela veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $x \in X$, pour $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ce qui veut dire en passant au sup $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Cela dit donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
   Réciproquement, si $\|f_n - f\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$, soit $\varepsilon > 0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, et donc pour tout x, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc f_n converge uniformément vers f. (on aurait aussi pu raisonner par équivalence).
3. Montrons que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.
   Par caractérisation séquentielle des fermés, il faut montrer qu'une suite de fonction f_n continues, qui converge dans E, c'est à dire qui converge uniformément vers une fonction f (par le 2), a une limite continue. C'est un résultat du cours. Donc l'ensemble des fonctions continues est fermé.