2021/2022 Semestre d'automne - L3 MathEco
Université Lyon I Topologie et théorie de la mesure

Feuille d'exercices II.

Espaces métriques, espaces normés

Exercice 1. 1. Rappeler la définition de la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, qui sera notée par la suite $\|\cdot\|_2$.

2. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ et $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ définissent des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2. Montrer que, si $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé, alors la fonction $d\colon E \times E \to [0, +\infty[$ définie par $d(x, y) = \|x - y\|$ est une distance sur E.

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ est un espace vectoriel normé. Montrer que pour tous x,$y \in E$, on a :

1. $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$;
2. $\|x\| + \|y\| \leq \|x + y\| + \|x - y\|$. (Indication, on pourra majorer $\|2x\|$ et $\|2y\|$.)

Exercice 4. Soient $(E, \|\cdot\|)$ et $(F, \|\cdot\|')$ deux espaces vectoriels normés. Montrer que les applications $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ définies pour (x, y) dans $E \times F$ par

$$\|(x, y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \quad ,$$

$$\|(x, y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} \quad \text{et}$$

$$\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\}$$

sont des normes sur $E \times F$. On appelle $\|\cdot\|_\infty$, *norme produit.*
Vérifier que ces trois normes sont équivalentes.

Exercice 5. Représenter les boules unités ouvertes dans $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et N_1, N_2 deux normes sur E. Pour tout vecteur x de E et réel $r > 0$, on note $B_1(x, r)$ et $B_2(x, r)$ les boules ouvertes de centre x et de rayon r dans (E, N_1) et (E, N_2) respectivement. Soit un réel $k > 0$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall x \in E,\ N_2(x) \leq kN_1(x)$;
2. $\forall x \in E,\ \forall r \in]0, +\infty[,\ B_1(x, r) \subseteq B_2(x, kr)$;
3. $B_1(0_E, 1) \subseteq B_2(0_E, k)$.

Exercice 7. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $\overline{F}$ est également un sous-espace vectoriel de E.

Exercice 8. On considère l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ continue}\}$.

1. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$ et $r > 0$, représenter graphiquement la boule ouverte $B(f,r)$.
3. Pour $f \in E$, on pose $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Justifier que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur E.
4. Montrer que les deux normes précédentes ne sont pas équivalentes.

Exercice 9. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max_{0\le k\le n} |a_k| \quad \text{où } P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

1. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Ces deux normes sont-elles équivalentes ?

Exercice 10. Soit (X,d) un espace métrique et (x_n) une suite d'éléments de X.
Supposons d'abord que les suites (x_{2k}) et (x_{2k+1}) convergent vers la même limite. Montrer que (x_n) est convergente. Ce résultat reste-t-il vrai si l'on ne suppose pas que les limites de (x_{2k}) et (x_{2k+1}) sont égales ?
Montrer que si (x_{2k}), (x_{2k+1}) et (x_{3k}) sont toutes les trois convergentes alors (x_n) est convergente.

Exercice 11.

1. Donner un exemple d'une intersection d'ouverts qui n'est pas un ouvert.
2. Donner un exemple d'une union de fermés qui n'est pas un fermé.

Exercice 12. ($\star$) Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$. Montrer que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$. Montrer que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Est-ce que B fermé dans $(E, \|\cdot\|_1)$?

Exercice 13. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r > 0$.

1. Montrer que l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$ est la boule ouverte $B(a,r)$.
2. Montrer que l'adhérence de la boule ouverte $B(a,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a,r)$.

Exercice 14. ($\star$)

1. Montrer que chaque espace métrique est un espace topologique.
2. Soit $\mathcal{U} = \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ est fini}\}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{U}$ est la famille des ouverts non-vides d'une topologie sur $\mathbb{R}$. (C'est *la topologie de Zariski sur* $\mathbb{R}$.)
   (b) Montrer que la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$ ne provient pas d'une métrique (ou norme) sur $\mathbb{R}$. (Indication : On pourra montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski n'est jamais un singleton $\{a\}$, ou que l'intersection de deux ouverts de Zariski est toujours non-vide.)

Exercice 15. ($\star$) Un espace métrique est *séparable* s'il contient un sous ensemble dénombrable et dense.

1. Montrer que chaque espace vectoriel normé (e.v.n.) de dimension finie est séparable.
2. Soit $l_\infty(\mathbb{N})$ l'ensemble de suites réelles $x = (x_i)$ telles que $\sup_i |x_i| < \infty$. On pose $\|x\|_\infty = \sup_i |x_i|$.
   (a) Montrer que $(l_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ est un e.v.n.
   (b) Soit $M = \{(x_i) : x_i \in \{0,1\}\}$. Montrer que M est non-dénombrable.
   (c) Montrer que si $x, y \in M$ alors $\|x-y\|_\infty \in \{0,1\}$ et que $B(x,1/2) \cap B(y,1/2) = \emptyset$ si $x \neq y$.
   (d) En déduire que $(l_\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable.

Exercice 16. ($\star$) Soit $l_1(\mathbb{N})$ l'ensemble de suites réelles (x_i) telles que $\sum_i |x_i| < \infty$. Si $x = (x_i) \in l_1(\mathbb{N})$ on pose $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$.

1. Montrer que $l_1(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel normé (e.v.n.) de dimension infinie ;
2. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ dans $l_1(\mathbb{N})$ n'est pas compacte ;
3. Soit V le sous-espace de $l_1(\mathbb{N})$ engendré par les $e_n = (0, \cdots, \underset{n}{1}, 0, 0, \cdots)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $V \subsetneqq l_1(\mathbb{N})$ et $\overline{V} = l_1(\mathbb{N})$. En déduire l'existance de formes linéaires non-continues sur $l_1(\mathbb{N})$.

Fonctions continues

Exercice 17. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Montrer que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exercice 19. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et telle qu'il existe M satisfaisant $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est lipschitzienne.

Exercice 20. Soit $f : [0, \frac{1}{2}] \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 1/\ln x & \text{si } x \in]0, 1/2] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue. Est-ce que f est uniformément continue ?
2. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par $\|\cdot\|_\infty$, et $\mathbb{R}$ de sa distance usuelle. Montrer que les fonctions $(x,y) \mapsto x+y$ et $(x,y) \mapsto xy$ sont continues.

Exercice 22. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, X une partie de E et $f, g \colon X \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que la somme $f+g$ et le produit fg sont également des fonctions continues.

Exercice 23. Montrer que la composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n\colon [0,1] \to [0,1]$ en posant

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \end{cases} .$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, représenter le graphe de la fonction f_n, puis montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera. La convergence est-elle uniforme ? f est-elle continue ?

Exercice 25. Montrer qu'une limite uniforme de fonctions uniformément continues est uniformément continue.

Exercice 26. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.
Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} .$$

1. Vérifier que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E.
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

$$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 .$$

3. Montrer que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.

Exercice 27. Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés, et $f\colon E \to F$ une fonction continue.

1. Montrer que pour tout $A \subseteq E$ on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. L'inclusion réciproque est-elle vraie en général ?
2. On suppose de plus que f est surjective. Montrer que si A est dense dans E alors $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 28. (Applications linéaires continues) Soit $(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ deux espaces vectoriels normés et f une application linéaire de E vers F. Vérifier que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.
4. $\exists K > 0, \forall x \in E, \|f(x)\| \leq K\|x\|$.
5. f est lipschitzienne.
6. f est uniformément continue.

On note $L(E,F)$ le sous-espace vectoriel des applications linéaires continues. Montrer que l'application $|||\cdot|||$ définie pour $f \in L(E,F)$ par

$$|||f||| = \sup\{\|f(x)\|\colon x \in \bar{B}(0,1)\}$$

est une norme sur $L(E,F)$.

Compacticité

Exercice 29. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\} \ , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3\} \ ,$$
$$C = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0,1]\} \ , \quad D = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0,1]\}.$$

Exercice 30. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(0,1)$ n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 31. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $\overline{B}(0,r)$.

Exercice 32. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$d(x,A) = \inf\{\|x-a\| \colon a \in A\} \ .$$

1. Montrer que pour tout $x,y \in \mathbb{R}^n$, $d(x,A) \leq d(y,A) + \|y-x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x,A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas,
$$d(x,F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$
4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit
$$d(A,B) = \inf\{\|b-a\| \colon a \in A, b \in B\} \ .$$
Montrer que $d(A,B) = \inf\{d(a,B) \colon a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que
$$d(K,F) = \|b-a\|.$$
6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t,e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t,-e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 33. Soit X une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, et $f \colon X \to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x,y \in X \ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x-y\| \ .$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $\|f(a) - a\| = \min\{\|f(x) - x\| \colon x \in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x-y\|$ pour tout x,y ?

Exercice 34. Soit (X, d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.
(Indication : utiliser la propriété de Borel-Lebesgue caractérisant la compacité en terme de recouvrements ouverts)

Exercice 35. Soit (X, d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X telle que $K_{n+1} \subseteq K_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $K = \bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K \subseteq U$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $K_i \subseteq U$ pour tout $i \geq n$.