Feuille d'exercices II.

Correction partielle

Exercice 1. 1. La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est définie, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, par

$$\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

2. Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :
   - (Positivité) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_1 \geq 0$;
   - (Séparation) On a, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_1 = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, |x_i| = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, x_i = 0;$$

   - (Homogénéité) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\|\lambda x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = \sum_{i=1}^{n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_1;$$

   - (Inégalité triangulaire) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\|x+y\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i| = \|x\|_1 + \|y\|_1.$$

Montrons maintenant que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :
   - (Positivité) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty \geq 0$;
   - (Séparation) On a, pour $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_\infty = 0 \iff \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, |x_i| = 0 \iff \forall 1 \leq i \leq n, x_i = 0;$$

   - (Homogénéité) Soit $x \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda x_i| = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda||x_i| = |\lambda| \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| = |\lambda|\|x\|_\infty;$$

   - (Inégalité triangulaire) Soit $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors, pour un certain $j \in \{1, 2, ..., n\}$, on a

$$\|x+y\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i+y_i| \leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i| + |y_i|\} = |x_j|+|y_j| \leq \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| + \max_{1 \leq i \leq n} |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Exercice 2. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(x,y) := \|x-y\|$. La fonction d est une distance sur E car elle vérifie :

— (Positivité) Pour tout $(x,y) \in E^2$, $d(x,y) \geq 0$;

— (Séparation) Pour $(x,y) \in E^2$, on a

$$d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y,$$

car $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

— (Symétrie) Pour tout $(x,y) \in E^2$, on a, en utilisant l'homogénéité de $\|\cdot\|$ avec $\lambda = -1$,

$$d(x,y) = \|x-y\| = \|-(x-y)\| = \|y-x\| = d(y,x).$$

— (Inégalité triangulaire) Pour tout $x, y, z \in E$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire pour la normale $\|\cdot\|$,

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

Exercice 3. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

1. Pour tout $x, y \in E$, on peut supposer sans perdre de généralité que que $\|x\| \geq \|y\|$, et on a
$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|,$$
ce qui implique que $|\|x\| - \|y\|| = \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$.
2. Pour tout $x, y \in E$, on a, en utilisant l'inégalité triangulaire,
$$\|2x\| = \|x+x\| = \|x-y+y+x\| \leq \|x-y\| + \|x+y\|;$$
$$\|2y\| = \|y+y\| = \|y-x+x+y\| \leq \|x-y\| + \|x+y\|.$$
Ainsi, on obtient, en utilisant l'homogénéité pour $\lambda = 2$ et en sommant les deux inégalités précédentes,
$$2\|x\| + 2\|y\| = \|2x\| + \|2y\| \leq 2\|x-y\| + 2\|x+y\|$$
et donc $\|x\| + \|y\| \leq \|x-y\| + \|x+y\|$.

Exercice 4. 1. Montrons que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $E \times F$. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :

— (Positivité) Pour tout $(x,y) \in E \times F$, $\|(x,y)\|_1 \geq 0$;

— (Séparation) Pour $(x,y) \in E \times F$,

$$\|(x,y)\|_1 = 0 \iff \|x\| + \|y\|' = 0 \iff \|x\| = 0 \text{ et } \|y\|' = 0 \iff x = 0_E \text{ et } y = 0_F,$$

car $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes sur E et F respectivement.

— (Homogénéité) Pour tout $(x,y) \in E \times F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda(x,y)\|_1 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_1 = \|\lambda x\| + \|\lambda y\|' = |\lambda|\|x\| + |\lambda|\|y\|' = |\lambda|\left(\|x\| + \|y\|'\right) = |\lambda|\|(x,y)\|_1.$$

— (Inégalité triangulaure) Pour tout $(x,y) \in E \times F$ et $(x_1, y_1) \in E \times F$, on a, par l'inégalité triangulaire pour les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$,

$$\|(x,y) + (x_1,y_1)\|_1 = \|(x+x_1, y+y_1)\|_\infty = \|x+x_1\| + \|y+y_1\|' \leq \|x\| + \|x_1\| + \|y\|' + \|y_1\|' = \|(x,y)\|_1 + \|(x_1,y_1)\|_1.$$

2. Montrons que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $E \times F$. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :
   — (Positivité) Pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\|(x, y)\|_2 \geq 0$;
   — (Séparation) Pour $(x, y) \in E \times F$, on a

$$\|(x,y)\|_2 = 0 \iff \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} = 0 \iff \|x\|^2 = \|y\|'^2 = 0 \iff x = 0_E \text{ et } y = 0_F,$$

   car $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes.
   — (Homogénéité) Pour tout $(x, y) \in E \times F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda(x,y)\|_2 = \|(\lambda x, \lambda y)\|_2 = \sqrt{\lambda|x\|^2 + \|\lambda y\|'^2} = \sqrt{\lambda^2\|x\|^2 + \lambda^2\|y\|'^2} = |\lambda|\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2}$$

   et on obtient bien que $\|\lambda(x,y)\|_2 = |\lambda|\|(x,y)\|_2$.
   — (Inégalité triangulaire) On commence par remarque que pour tout $x \in E \times F$, on a

$$\|(x,y)\|_2 = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|'^2} = \|(\|x\|, \|y\|')\|_e$$

   où cette dernière norme $\|\cdot\|_e$ est la norme euclidienne sur $(\mathbb{R}_+)^2$ (nous changeons la notation afin de ne pas mélanger les deux normes indicées par 2). Ainsi, pour tout $(x, y) \in E \times F$ et $(x_1, y_1) \in E \times F$, on a, par l'inégalité triangulaire pour les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$,

$$\|(x,y)+(x_1,y_1)\|_2 = \|(x+x_1, y+y_1)\|_2 = \|(\|x+x_1\|, \|y+y_1\||)\|_e \leq \|(\|x\|+\|x_1\|, \|y\|+\|y_1\|)\|_e.$$

   Par l'inégalité triangulaire pour la norme $\|\cdot\|_e$, on obtient

$$\|(\|x\|+\|x_1\|, \|y\|+\|y_1\|)\|_e \leq \|(\|x\|, \|y\|')\|_e + \|(\|x_1\|, \|y_1\|')\|_e = \|(x,y)\|_2 + \|(x_1,y_1)\|_2,$$

   et on a prouvé que

$$\|(x,y) + (x_1,y_1)\|_2 \leq \|(x,y)\|_2 + \|(x_1,y_1)\|_2.$$

3. Montrons que la norme produit $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $E \times F$. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :
   — (Positivité) Pour tout $(x, y) \in E \times F$, on a $\|(x, y)\|_\infty \geq 0$;
   — (Séparation) Pour $(x, y) \in E \times F$, on a

$$\|(x,y)\|_\infty = 0 \iff \max\{\|x\|, \|y\|'\} = 0 \iff \|x\| = \|y\|' = 0 \iff x = 0_E \text{ et } y_F = 0,$$

   car $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont des normes.
   — (Homogénéité) Pour tout $(x, y) \in E \times F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda(x,y)\|_\infty = \|(\lambda x, \lambda y)\|_\infty = \max\{\|\lambda x\|, \|\lambda y\|'\} = \max\{|\lambda|\|x\|, |\lambda|\|y\|'\} = |\lambda|\|(x,y)\|_\infty.$$

   — (Inégalité triangulaire) Pour tout $(x, y) \in E \times F$ et $(x_1, y_1) \in E \times F$, on a, par l'inégalité triangulaire pour les deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$,

$$\|(x+x_1, y+y_1)\|_\infty = \max\{\|x+x_1\|, \|y+y_1\|'\} \leq \max\{\|x\| + \|x_1\|, \|y\| + \|y_1\|\}.$$

   Comme $\max\{\|x\| + \|x_1\|, \|y\| + \|y_1\|\} \leq \max\{\|x\|, \|y\|'\} + \max\{\|x_1\|, \|y_1\|\} = \|(x,y)\|_\infty + \|(x_1,y_1)\|_\infty$, l'inégalité triangulaire est prouvée.

Montrons maintenant que ces normes sont équivalentes. En effet, on a, pour tout $(x, y) \in E \times F$,

— $\|(x,y)\|_1 = \|x\| + \|y\|' \leq 2\max\{\|x\|, \|y\|'\} = \|(x,y)\|_\infty$;
— $\|(x,y)\|_\infty = \max\{\|x\|, \|y\|'\} \leq \|x\| + \|y\|' = \|(x,y)\|_1$;
— $\|(x,y)\|_1^2 = \|x\|^2 + \|y\|'^2 + 2\|x\|\|y\|' \geq \|x\|^2 + \|y\|'^2 = \|(x,y)\|_2^2$, c'est-à-dire $\|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1$;
— $\|(x,y)\|_1^2 = \|x\|^2 + \|y\|'^2 + 2\|x\|\|y\|' \leq \|x\|^2 + \|y\|'^2 + \|x\|^2 + \|y\|'^2 = 2\|(x,y)\|_2^2$, c'est-à-dire $\|(x,y)\|_1 \leq \sqrt{2}\|(x,y)\|_2$. Ici on a utilisé le fait que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $2ab \leq a^2 + b^2$.
—

On a donc, pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_\infty \leq 2\|(x,y)\|_1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\|(x,y)\|_1 \leq \|(x,y)\|_2 \leq \|(x,y)\|_1,$$

c'est-à-dire que $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$, et donc $\|\cdot\|_2 \sim \|\cdot\|_\infty$, toute ces normes sont donc équivalentes.

Exercice 5. Les boules unités ouvertes dan $\mathbb{R}^2$ pour les normes $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_1$ sont données par :

$$\begin{aligned}
B_1(0,1) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}; \\
B_2(0,1) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}; \\
B_\infty(0,1) &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < 1\}.
\end{aligned}$$

Les boules elles-mêmes s'en déduisent Facilement (car convexes et contenant 0). Voir la correction 2021-2022 pour un dessin.

Exercice 6. Montrons l'équivalence en montrant :

— 1. $\Longrightarrow$ 2. On suppose que, pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq kN_1(x)$. Soit $x \in E$ et $r > 0$. Si $y \in B_1(x, r)$, alors $N_1(x-y) < r$, et donc $N_2(x-y) \leq kN_1(x)y < kr$. On en déduit que $y \in B_1(x, kr)$ et que donc $B_1(x,r) \subset B_2(x, kr)$.
— 2. $\Longrightarrow$ 3. C'est trivial en appliquant 2. à $x = 0_E$ et $r = 1$.
— 3. $\Longrightarrow$ 1. On suppose que $B_1(0_E, 1) \subset B_2(0_E, k)$. Soit $x \in E$, alors $\frac{x}{N_1(x)+\varepsilon} \in B_1(0_E, 1)$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $N_1(x)+\varepsilon > 0$. On en déduit que $\frac{x}{N_1(x)+\varepsilon} \in B_1(0_E,1) \subset B_2(0_E, k)$ et donc que

$$N_2\left(\frac{x}{N_1(x)+\varepsilon}\right) < k.$$

Par homogénéité (avec $\lambda = (N_1(x)+\varepsilon)^{-1}$), on obtient

$$\frac{N_2(x)}{N_1(x)+\varepsilon} < k,$$

et donc

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in E, \quad N_2(x) < k\left(N_1(x)+\varepsilon\right).$$

On e déduit donc que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq kN_2(x)$ (en prenant la limite quand $\varepsilon \to 0$).

Exercice 7. Il suffit de montrer que :

— $\overline{F} \neq \emptyset$. Cette propriété est claire car $\emptyset \neq F \subset \overline{F}$.

— $\forall x, y \in \overline{F}, x + y \in \overline{F}$. En effet, soit $x, y \in \overline{F}$, alors il existe deux suites d'éléments de F $\{x_n\}_n$ et $\{y_n\}_n$ telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. On en déduit que la suite $\{x_n + y_n\}_n$ converge vers $x + y$ qui appartient donc à $\overline{F}$.

— $\forall x \in \overline{F}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x \in \overline{F}$. En effet, soit $x \in \overline{F}$, alors il existe une suite d'éléments de F $\{x_n\}_n$ convergeant vers x. On en déduit que λx_n converge vers λx qui appartient donc à $\overline{F}$.

Exercice 8. 1. Montrons que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :

— (Positivité) Pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \geq 0$;

— (Séparation) Pour $f \in E$, on a

$$\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0,1], f(x) = 0.$$

— (Homogénéité) Pour tout $f \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |\lambda||f(x)| = |\lambda|\|f\|_\infty.$$

— (Inégalité triangulaire) Pour tout $f, g \in E$, on a

$$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)| + |g(x)|\} \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |g(x)|,$$

et on a donc $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

2. Il suffit de représenter n'importe quelle fonction f continue sur $[0,1]$ et l'ensemble des fonctions g telles que $\|f - g\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| < r$, c'est-à-dire telles que pour tout $x \in [0,1]$, $|f(x) - g(x)| < r$ que l'on écrit

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) - r < g(x) < f(x) + r.$$

$B_\infty(f, r)$ est donc l'ensemble colorié en bleu, où f est tracée en rouge, sur la figure dessinée dans la correction 2021-2022.

3. Montrons que la norme $\|\cdot\|_1$ est bien une norme sur E. Elle vérifie en effet les propriétés suivantes :

— (Positivité) Pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \geq 0$;

— (Séparation) Pour $f \in E$, on a

$$\|f\|_1 = 0 \iff \int_0^1 |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0,1], |f(x)| = 0 \iff \forall x \in [0,1], f(x) = 0.$$

Notez que cette équivalence n'est vraie que parce que f est continue.

— (Homogénéité) Pour tout $f \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)| dx = \int_0^1 |\lambda||f(x)| dx = |\lambda|\|f\|_1.$$

— (Inégalité triangulaire) Pour tout $f, g \in E$, on a

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \leq \int_0^1 \{|f(x)| + |g(x)|\}\, dx \leq \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx,$$

et on a donc $\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$.

4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_1$ ne sont pas équivalentes, car, si on pose, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = e^{-nx}$, on trouve

$$\|f_n\|_\infty = e^{-n\times 0} = 0, \quad \|f_n\|_1 = \int_0^1 e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n}}{n},$$

ce qui implique que $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} \to 0$ quand $n \to +\infty$, et donc que les normes ne sont pas équivalentes, car sinon il existerait une constante $m > 0$ telle que $\frac{\|f_n\|_1}{\|f_n\|_\infty} > m$ ce qui n'est clairement pas le cas.

Exercice 9. 1. Ce sont bien des normes sur $\mathbb{R}[X]$ car l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré n peut être identifié à $\mathbb{R}^n$ (via ses coefficients) où les normes définies dans l'exercice correspondent bien à des normes. On pourra toujours réitérer la preuve de chacune des propriétés, mais elles ont déjà été montrées dans l'Exercice 1.

2. Supposons qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\|_1 \leq M\|P\|_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $P_n(X) = 1 + X + X^2 + ... + X^n$. Alors il est clair que $\|P_n\|_1 = n + 1 \leq C$ ce qui est impossible pour n assez grand. Donc ces normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 10. Supposons que $(x_{2k})_k$ et $(x_{2k+1})_k$ convergent vers la même limite x. On a donc par définition,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0, \forall k \geq k_0, |x_{2k} - x| \leq \varepsilon_0,$$
$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_1, \forall k \geq k_1, |x_{2k+1} - x| \leq \varepsilon_1.$$

On en déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $K := \max\{E(k_0/2), E(k_1 - 1/2)\}$, où $E(a)$ désigne la partie entière d'un réel a, tel que pour tout $k \geq K$, $|x_k - x| < \varepsilon$.
Si les limites ne sont pas égales, le résultat n'est plus vrai. Par exemple, si $x_k = (-1)^k$, on a $x_{2k} = 1$ et $x_{2k+1} = -1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi chaque sous-suite $(x_{2k})_k$ et $(x_{2k+1})_k$ converge mais la suite $(x_k)_k$ ne converge pas.
Si les trois sous-suites $(x_{2k})_k$, $(x_{2k+1})_k$ et $(x_{3k})_k$ convergent, alors elles convergent nécessairement vers la même limite. En effet, les ensembles $\{k \in \mathbb{N} : 3k \in 2\mathbb{N}\}$ et $\{k \in \mathbb{N} : 3k \in 2\mathbb{N}+1\}$ sont infinis et on peut donc extraire des sous-suites

— de $(x_{2k})_k$ et $(x_{3k})_k$ qui convergent vers le même réel x ;

— de $(x_{2k+1})_k$ et $(x_{3k})_k$ qui convergent vers le même réel y.

Comme toutes les suites extraites d'une suite convergente convergent vers le même réel, on en déduit que $x = y$ et ainsi $(x_{2k})_k$ et $(x_{2k+1})_k$ convergent vers la même limite x, donc $(x_k)_k$ converge vers x (cf début de l'exercice).

Exercice 11. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'ouvert $A_n := \left]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right[$. On a ainsi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right[= \{0\}$$

qui n'est pas un ouvert (c'est un fermé).

2. Par passage au complémentaire dans l'exemple précédent, $A_n^c = \left]-\infty, \frac{-1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, +\infty\right[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ mais on a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \mathbb{R}^*.$$

qui n'est pas fermé (c'est un ouvert).

Exercice 12. ($\star$) Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \text{ continue}\}$.

1. Soit $A = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) > 0\}$.
   Montrons que A est ouvert dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
   -Méthode 1 : Soit $f \in A$, il faut trouver une boule $B(f, \varepsilon) \subset A$ (pour montrer que A est un voisinage de chacun de ses points). Pour cela, comme f est continue, elle atteint son minimum sur $[0,1]$, disons en a donc $f(a) = \varepsilon > 0$ et pour tout $x \in [0,1]$:$f(x) \geq f(a) = \varepsilon$.
   Soit $g \in B(f, \varepsilon)$, on a $(g - f) \geq -||f - g||_\infty$, donc $g \geq f - ||f - g||_\infty > f - \varepsilon \geq 0$, donc $g(x) > 0$ c'est à dire $g \in A$. On a donc déduit $B(f, \varepsilon) \subset A$.
   -Méthode 2 : On montre que A^c est fermé. Soit f_n une suite de fonctions de A^c avec $||f_n - f||_\infty \to 0$, donc il existe $x_n \in [0,1]$, tel que $f_n(x_n) \leq 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $x_{n_k} \to x$. On a par inégalité triangulaire, définition de la norme infinie, et continuité de f :

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| \leq ||f_{n_k} - f||_\infty + |f(x_{n_k}) - f(x)| \to_{k\to\infty} 0$$

   En passant à la limite dans l'inégalité $f_{n_k}(x_{n_k}) \leq 0$, on obtient $f(x) \leq 0$ et donc $f \in A^c$. A^c est donc fermé.
   -On veut maintenant montrer que A n'est pas ouvert dans $(E, \|\cdot\|_1)$. En fait, on va montrer que l'intérieur de A est vide. (le fait que l'intérieur de A est non-vide pour la norme $||.||_\infty$ caractérise même les normes équivalentes à des normes du type sup, mais c'est un résultat plus dur).
   On prend donc $f \in A$ et on souhaite montrer que $f \in \overline{A^c} = (Int(A))^c$. Considérons la fonction (triangle autour de 0) $g_n(x) = \max(1 - nx, 0)$ elle vaut 0 pour $x \geq 1/n$ et $g_n(0) = 1$. Par un calcul d'intégrale $||g_n||_1 = 1/2n$ (aire d'un triangle de hauteur 1 et de base 1/n).
   Mais $f_n = f - (f(0) + 1)g_n$ vérifie $f(0) - f(0) - 1 = -1 < 0$ donc $f_n \in A^c$. Mais $||f_n - f||_1 = |(f(0) + 1)|||g_n||_1 \to 0$ donc $f \in \overline{A^c}$.
2. Soit $B = \{f \in E : \exists x \in [0,1], f(x) = 0\}$.
   Montrons que B est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Méthode 1 : On remarque que $B^c = \{f \in E : \forall x \in [0,1], f(x) \neq 0\} = A \cup -A$ car une fonction continue à valeur dans $\mathbb{R}$ qui n'est pas ni positive ni négative doit s'annuler par le théorème des valeurs intermédiaires. $S(f) = -f$ est une isométrie linéaire, donc S est continue Donc $B^c = A \cap S^{-1}(A)$ est l'intersection de deux ouvert (le deuxième par image inverse d'un ouvert par une application continue. COmme B^c est ouvert, on a B fermé.

Méthode 2 : On raisonne comme dans la méthode 2 pour voir que A^c est fermé (ce qui marche même pour les fonctions à valeur complexe, contrairement à la méthode 1).

Soit f_n une suite de fonctions de B avec $||f_n - f||_\infty \to 0$, donc il existe $x_n \in [0,1]$, tel que $f_n(x_n) = 0$. Comme $[0,1]$ est compact, on peut extraire une sous-suite $x_{n_k} \to x$. On a par inégalité triangulaire, définition de la norme infinie, et continuité de f :

$$|f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x)| \leq |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| + |f(x_{n_k}) - f(x)| \leq ||f_{n_k} - f||_\infty + |f(x_{n_k}) - f(x)| \to_{k\to\infty} 0$$

En passant à la limite dans l'égalité $f_{n_k}(x_{n_k}) = 0$, on obtient $f(x) = 0$ et donc $f \in B$. B est donc fermé.

Exercice 13. On notera B la boule ouverte, $\bar{B}$ la boule fermée, B° l'intérieur de la boule fermée et $\overline{B}$ l'adhérence de la boule ouverte.

1. Montrons que $B^\circ = B$. On sait que $B \subset B^\circ$ par définition. Montrons maintenant que $B^\circ \subset B$. Soit $y \in B^c$ et $y_n := a + \frac{n-1}{n}(y-a)$. Alors $y_n \in \bar{B}^c$ et $y_n \to y \in B^c$. Ainsi $y \in \overline{\bar{B}^c}$. On en déduit que $B^c \subset \overline{\bar{B}^c}$, et donc que $B^\circ \subset B$.
2. Montrons que $\overline{B} = \bar{B}$. On sait que $\overline{B} \subset \bar{B}$ par définition. Montrons que $\bar{B} \subset \overline{B}$. Soit $y \in \bar{B}$ et $y_n := a + \frac{n-1}{n}(y-a)$. Alors $y_n \in B$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_n \to y \in \bar{B}$. On a donc $y \in \overline{B}$ et on en conclut par passage au complémentaire que $\bar{B} \subset \overline{B}$.

Exercice 14. 1. Pour montrer que chaque espace métrique (E,d) est un espace topologique, il suffit de montrer que l'union quelconque des boules ouvertes définit bien une topologie sur E :
   - Les unions de boules ouvertes sont bien des parties de E ;
   - On a bien $\emptyset$ et E qui appartiennent à l'ensemble des unions boules ouvertes (par exemple centrées en certains points de E de telle sorte qu'elles recouvrent totalement E) ;
   - Par définition, une union d'union de boules ouvertes et une union de boules ouvertes ;
   - Toute intersection finie d'union de boules ouvertes est aussi une union de boules ouvertes (pas nécessairement les mêmes).

2. Soit $\mathcal{U} := \{A \subset \mathbb{R} : A^c \text{ et fini}\}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est bien la famille des ouvertes non-vides d'une topologie sur $\mathbb{R}$ car :
      - $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$;
      - $\mathbb{R} \subset \mathcal{U}$ car $\mathbb{R}^c = \emptyset$ est fini ;
      - Soit $(A_i)_{i\in I} \subset \mathcal{U}$, alors $\forall i \in I$, A_i^c est fini, et donc $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ est fini comme intersection d'ensembles finis. Donc $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{U}$;

— Soit $(A_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ une famille finie de $\mathcal{U}$, alors comme A_i^c est fini pour tout i, on a $\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^n A_i^c$ fini comme union finie d'ensembles finis. Donc $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{U}$.

(b) Soient $A, B \in \mathcal{U}$ non-vides. Par l'absurde, supposons que $A \cap B = \emptyset$, on en déduit que $A^c \cup B^c = \mathbb{R}$ par passage au complémentaire. Comme A et B sont dans $\mathcal{U}$, on sait que A^c et B^c sont finis, et donc il est impossible que $A^c \cup B^c = \mathbb{R}$. Ainsi, $A \cap B \neq \emptyset$ et la topologie de Zariski sur $\mathbb{R}$ ne peut pas provenir d'une métrique sur $\mathbb{R}$, car deux boules s'intersectent toujours, pour n'importe quels rayons donnés.

Exercice 15. 1. Si E est un espace vectoriel de dimension fini sur $\mathbb{R}$ et si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors il est clair que l'ensemble dénombrable (car la somme est finie et $\mathbb{Q}$ est dénombrable)

$$D := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i : \lambda_i \in \mathbb{Q} \right\} \quad \text{est dense dans } E.$$

2. (a) On doit d'abord montrer que $l_\infty(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, ce qui est clair : $\forall x, y \in l_\infty(\mathbb{N}), \forall \lambda \in \mathbb{R}, x + \lambda y \in l_\infty(\mathbb{N})$ car $\sup_i |x_i + \lambda y_i| < \infty$. Il faut ensuite montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $l_\infty(\mathbb{N})$:

— (Positivité) $\forall x \in l_\infty(\mathbb{N})$, $\|x\|_\infty \geq 0$;

— (Séparation) Pour $x \in l_\infty(\mathbb{N})$, on a $\|x\|_\infty = 0 \iff \sup_i |x_i| = 0 \iff \forall i, |x_i| = 0 \iff x = 0$.

— (Homogénéité) Pour tout $x \in l_\infty(\mathbb{N})$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda x\|_\infty = \sup_i |\lambda x_i| = \sup_i |\lambda||x_i| = |\lambda| \sup_i |x_i| = |\lambda| \|x\|_\infty.$$

— (Inégalité triangulaire) Pour tous $(x, y) \in l_\infty(\mathbb{N})^2$, on a

$$\|x+y\|_\infty = \sup_i |x_i+y_i| \leq \sup_i \{|x_i| + |y_i|\} \leq \sup_i |x_i| + \sup_i |y_i| = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

(b) On remarque que $M = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et on a déjà montré que $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ est non-dénombrable en construisant une bijection entre cet ensemble et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ via les fonctions indicatrices (cf. Feuille de TD 1, Exercice 7).

(c) Soient $x, y \in M$, alors $\|x - y\|_\infty = \sup_i |x_i - y_i|$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a trois possibilités :

— si $x_i = y_i \in \{0, 1\}$, alors $|x_i - y_i| = 0$;

— si $x_i \neq y_i$, alors $\{x_i, y_i\} = \{0, 1\}$ et $|x_i - y_i| = 1$.

Ainsi, on a $\|x - y\|_\infty = \sup_i |x_i - y_i| \in \{0, 1\}$. De plus, si $x \neq y$, alors supposons qu'il existe $z \in B(x, 1/2) \cap B(y, 1/2)$, on a par définition

$$\|x - z\|_\infty < 1/2, \quad \text{et} \quad \|y - z\|_\infty < 1/2.$$

On en déduit que $\|x - y\|_\infty \leq \|x - z\|_\infty + \|z - y\|_\infty < 1$, et donc $\|x - y\|_\infty = 0$ car $\|x - y\|_\infty \in \{0, 1\}$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, on obtient $x = y$ ce qui est une contradiction. Ainsi, $B(x, 1/2) \cap B(y, 1/2) = \emptyset$.

(d) On sait qu'un espace séparable possède la condition de chaîne dénombrable, c'est-à-dire que toute famille dénombrable d'ouverts non-vides disjoints deux-à-deux est au plus dénombrable. Or la famille

$$\mathcal{U} := \{B(x, 1/2); x \in M\}$$

est une famille d'ouverts disjoints (par la question précédente) et comme M est non-dénombrable il en va de même pour $\mathcal{U}$, donc $l_\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Exercice 16. cf TD.

Fonctions continues

Exercice 17. On rappelle la négation de la continuité uniforme pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$\exists \varepsilon > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall \delta > 0, |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \varepsilon.$$

Soit $\varepsilon = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$ on choisit $x = n$ et $y = n + \frac{1}{2n}$. Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe n_δ tel que $n > n_0 \Rightarrow \delta > \frac{1}{2n} = |x - y|$. Ainsi, pour tout $n > n_\delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{2n}\right)^2 \right| = \left| -\frac{1}{4n^2} - 1 \right| = 1 + \frac{1}{4n^2} > \varepsilon = 1,$$

et on en déduit que $x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. Soient (X, d) et (Y, D) deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction lipschitzienne, c'est-à-dire que

$$\exists K > 0, \forall (x, y) \in X^2, D(f(x), f(y)) \leq K d(x, y).$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ qui est indépendant de n'importe quel couple $(x, y) \in X$. Alors si $x, y \in X$ sont tels que $d(x, y) \leq \delta$, on a

$$D(f(x), f(y)) \leq K d(x, y) \leq K\delta = K\frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

ce qui prouve que f est uniformément continue sur X.

Exercice 19. Par le théorème des accroissements finis, pour tout $x < y$ il existe $c_{x,y} \in]x, y[$ ($c_{x,y}$ dépend de (x, y)) tel que $f(y) - f(x) = (y - x)f'(c)$. Ainsi, on a, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y) - f(x)| = |y - x||f'(c_{x,y})| \leq M|y - x|.$$

On en déduit donc que f est lipschitzienne.

Exercice 20. 1. f est continue car :

— f est continue sur $]0, 1/2]$ comme inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas ;

— On a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{\ln x} = 0 = f(0)$, donc f est aussi continue en 0.

Comme f est continue sur $[0,1/2]$ alors d'après le théorème de Heine f est uniformément continue sur $[0,1/2]$.

2. Soit $K>0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{1}{n}$. Alors on a
$$\frac{|f(y_n)-f(0)|}{|y_n-0|} = \frac{|f(y_n)|}{|y_n|} = \frac{n}{\ln n} > K$$
pour n assez grand, ce qui implique que f n'est pas Lipschitzienne sur $[0,1/2]$.

Exercice 21. Soit $\varepsilon > 0$ et définissons $\delta = \varepsilon$, alors, pour tout $(x,y),(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty = \max\{|x-x_0|,|y-y_0|\} \leq \delta$, on a, en notant $f(x,y)=x+y$,
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)| = |x+y-x_0-y_0| \leq |x-x_0|+|y-y_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty \leq \delta = \varepsilon,$$
et ainsi f est continue.
Pour le produit $g(x,y)=xy$, on remarque que pour tout $(x,y),(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$,
$$xy - x_0y_0 = x(y-y_0) + y_0(x-x_0).$$
On obtient donc $|xy-x_0y_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty(|x|+|y_0|) \leq \delta(|x|+|y_0|)$ dès que $\|(x,y)-(x_0,y_0)\|_\infty \leq \delta$. Ainsi, il est clair que pour tout $\varepsilon>0$ et tout $(x,y),(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existera $\delta > 0$ tel que $\delta(|x|+|y_0|) \leq \varepsilon$, ce qui prouve que g est continue.

Exercice 22. *La preuve est essentiellement ce qui a été fait dans l'exercice précédent.*

Exercice 23. On sait que $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont uniformément continues où (E,d_E), (F,d_F) et (G,d_G) sont des espaces métriques, c'est-à-dire :
$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon_1, \exists \delta_1, \forall (x_1,x_2) \in E^2, d_E(x_1,x_2) \leq \delta_1 \Rightarrow d_F(f(x_1),f(x_2)) \leq \varepsilon_1\\
&\forall \varepsilon_2, \exists \delta_2, \forall (y_1,y_2) \in F^2, d_F(y_1,y_2) \leq \delta_2 \Rightarrow d_G(g(y_1),g(y_2)) \leq \varepsilon_2.
\end{aligned}$$
Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $\delta = \delta_1 > 0$ et $\delta_2 = \varepsilon_1 > 0$ tel que $d_G(g(f(x_1)),g(f(x_2))) \leq \varepsilon$ dès que $d_E(x_1,x_2) \leq \delta_1$ car alors $d_F(f(x_1),f(x_2)) \leq \delta_2$. Ainsi, $g \circ f$ est uniformément continue.

Exercice 24. cf TD.

Exercice 25. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonction uniformément continues de limite f. Montrons que f est uniformément continue. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(x,y) \in E^2$,
$$d_F(f(x),f(y)) \leq d_F(f(x),f_n(x)) + d_F(f_n(x),f_n(y)) + d_F(f(y),f_n(y)).$$
Comme f_n est uniformément continue, alors
$$\forall \varepsilon_1 > 0, \exists \delta_1 > 0, \forall (x,y) \in E^2, d_E(x,y) \leq \delta_1 \Rightarrow d_F(f_n(x),f_n(y)) \leq \varepsilon_1.$$
Comme $(f_n)_n$ converge uniformément vers f, alors
$$\forall \varepsilon_2 > 0, \exists N_2, \forall z \in E, \forall n \geq N_2, \sup_{x\in E} d_F(f_n(z),f(z)) \leq \varepsilon_2.$$
On applique les assertions précédentes pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3}$ et on obtient, pour tout $n \geq N_2$ et tout $(x,y) \in E^2$,
$$d_E(x,y) \leq \delta_1 \Rightarrow d_F(f(x),f(y)) \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$
et ainsi f est uniformément continue.

Exercice 26. Soit X une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On désigne par E l'espace vectoriel formé par toutes les fonctions $f\colon X \to \mathbb{R}$ qui sont *bornées*, c'est-à-dire qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|f(x)| \leq M$ pour tout $x \in X$.
Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} \ .$$

1. Vérifions que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur E. On peut le montrer comme sur $C^0(X,\mathbb{R})$ dans la deuxième partie du cours. Autre méthode : Si on munit X de la tribu $\mathcal{P}(X)$ pour laquelle toutes les fonctions sont mesurables (et ν la mesure de comptage) alors $E = L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$. En effet, $\nu(A) = 0$ implique $A = \emptyset$, donc $|f(x)| \leq M$, ν-presque partout veut dire partout. $||f||_\infty$ est la norme usuelle de $L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$, on peut appliquer le cours (ou reprendre la preuve).
2. Montrer que pour toute suite (f_n) d'éléments de E et $f \in E$, on a l'équivalence

   $$((f_n) \text{ converge uniformément vers } f) \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \to 0 \ .$$

   Si (f_n) converge uniformément vers f, cela veut dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $x \in X$, pour $n \geq N$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ ce qui veut dire en passant au sup $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Cela dit donc $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
   Réciproquement, si $\|f_n - f\|_\infty \to_{n\to\infty} 0$, soit $\varepsilon > 0$, $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour $n \geq N$, et donc pour tout x, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc f_n converge uniformément vers f. (on aurait aussi pu raisonner par équivalence).
3. Montrons que les fonctions continues appartenant à E forment un fermé de E.
   Par caractérisation séquentielle des fermés, il faut montrer qu'une suite de fonction f_n continues, qui converge dans E, c'est à dire qui converge uniformément vers une fonction f (par le 2), a une limite continue. C'est un résultat du cours. Donc l'ensemble des fonctions continues est fermé.

Exercice 27.

1. Montrons que, pour tout $A \subset E$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$. On a

   $$\begin{aligned} y \in f(\overline{A}) &\iff \exists x \in \overline{A}, y = f(x) \\ &\iff \exists (x_n)_n \subset A, x_n \to x \text{ et } y = f(x). \end{aligned}$$

   On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f(x_n) \in f(A)$. Alors $y_n \to y = f(x)$ par continuité de f. Ainsi, il existe une suite $(y_n)_n$ de $f(A)$ tendant vers y, et donc $y \in \overline{f(A)}$.
   L'inclusion réciproque est fausse en générale. Par exemple, si

   $$f(x) = (1 - e^{-x})\sin(x), \quad \text{et} \quad A =]0, +\infty[.$$

   Alors $\overline{A} = [0, +\infty[$, $f(A) =]-1, 1[= f(\overline{A})$ et $\overline{f(A)} = [-1, 1]$. Donc dans cet exemple, $\overline{f(A)} \not\subset f(\overline{A})$.
2. Supposons que f est surjective et que $\overline{A} = E$. Comme

   $$f(\overline{A}) = f(E) = F \subset \overline{f(A)} \subset F$$

   où on a utilisé la surjectivité de f, alors $\overline{f(A)} = F$ et $f(A)$ est dense dans F.

Exercice 28. Montrons l'équivalence de ces 6 assertions :

1. f est continue sur E.
2. f est continue en 0.
3. f est bornée sur la boule unité fermée $\bar{B}(0,1)$.
4. $\exists K > 0$, $\forall x \in E$, $\|f(xl\| \leq K\|x\|$.
5. f est lipschitzienne.
6. f est uniformément continue.

• 1. $\Rightarrow$ 2. Evident car $0 \in E$.
• 2. $\Rightarrow$ 3. On a f continue en 0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|x\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x)\| \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire si et seulement si, par linéarité de f,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \left\|\frac{x}{\delta}\right\| \leq 1 \Rightarrow \left\|f\left(\frac{x}{\delta}\right)\right\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Ainsi, si $x \in \bar{B}(0,1)$, $\exists r > 0$, $\|f(x)\| \leq r$, c'est-à-dire que f est bornée sur $\bar{B}(0,1)$.
• 3. $\Rightarrow$ 4. L'assertion 4. est évidente pour $x = 0$ car $f(0) = 0 = \|0\|$. Comme f est bornée sur la boule fermée unitée, on sait qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in E\backslash\{0\}$,

$$\left\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq K,$$

c'est-à-dire, par linéarité de f, que $\|f(x)\| \leq K\|x\|$ et l'assertion 4. est prouvée.
• 4. $\Rightarrow$ 5. C'est évident car, pour tout $(x,y) \in E^2$, on a, par linéarité de f,

$$\|f(x) - f(y)\| = \|f(x-y)\| \leq K\|x-y\|.$$

• 5. $\Rightarrow$ 6. Soit $\varepsilon > 0$. On sait que pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x-y\|$. Ainsi, si $\|x-y\| \leq \delta := \frac{\varepsilon}{K}$, alors $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ et f est uniformément continue.
• 6. $\Rightarrow$ 1. Cette implication est évidente par définition.

Le fait que $|||\cdot|||$ soit une norme est simple à démontrer en utilisant le fait que $\|\cdot\|$ est une norme et en adaptant la preuve que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme (cf. Exercice 8.).

Compacité

Exercice 29. On a $A = f^{-1}(\{1\}$ où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $f(x,y) = x^2 + y^4$. Comme f est continue et $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$, alors A est fermé dans $\mathbb{R}^2$. De plus,

$$x^2 + y^4 = 1 \Rightarrow x^2 \leq 1 \text{ et } y^4 \leq 1 \Rightarrow x, y \in [-1,1],$$

donc A est borné. Ainsi, A est un compact en tant que fermé borné de $\mathbb{R}^2$.
B est non-borné car pour tout $y \in \mathbb{R}_+$ il existe $x = y^{\frac{2}{3}} > 0$ tel que $(x,y) \in B$. Donc B n'est pas un compact.
$C = f([0,1])$ où $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Comme f est continue et $[0,1]$ est un compact de $\mathbb{R}$, alors C est un compact de $\mathbb{R}^2$ comme image d'un compact par une application continue.
D n'est pas compact car D n'est pas fermé. En effet, soit $(t_n)_n \subset]0,1]$ une suite de réels tendant vers 0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n := (\cos t_n, \sin t_n) \in D$ est une suite de D et $y_n \to y = (0,0) \notin D$. Ainsi il existe une suite d'éléments de D qui converge vers un élément y qui n'appartient pas à D, donc D n'est pas fermé.

Exercice 30. Supposons que $\bar{B}(0,1)$ est compacte, alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $(X^{\varphi(n)})_n$ converge vers un polynôme P quand $n \to +\infty$. On a ainsi

— $P(1) = \lim\limits_{n \to +\infty} 1^{\varphi(n)} = 1$;

— $\forall x \in [0, 1[$, $P(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} x^{\varphi(n)} = 0$ car $|x| < 1$.

Cela veut dire que P n'est pas continue en $x = 1$, ce qui est impossible pour une fonction polynôme. On a donc une contradiction et $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

Exercice 31. Si $A \subset B(0,1)$ alors $\forall x \in A, \|x\| < 1$. Par définition de l'inégalité stricte, on a :

$$\forall x \in A, \exists r_x, \|x\| \leq r_x < 1.$$

On peut recouvrir A par l'union des boules centrées en x et de rayons r_x, i.e.

$$A \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

Comme A est compact, il existe un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble de points $\{x_1, ..., x_n\} \subset A$ tels que

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_{x_k}).$$

Ainsi, $\max_{1 \leq k \leq n} r_{x_k} = r$ existe et $r < 1$ de telle sorte que

$$\forall x \in A, \|x\| \leq r < 1,$$

c'est à dire que $A \subset \bar{B}(0, r)$ où $r < 1$.

Exercice 32.

1. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, alors par définition de l'infimum et l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall a \in A, d(x, A) \leq \|x - a\| \leq \|x - y\| + \|y - a\|.$$

   Ainsi, en reprenant l'infinumum sur tous les $a \in A$, on obtient

$$d(x, A) \leq \|x - y\| + d(y, A).$$

2. On remarque l'on peut échanger le rôle de x et y dans l'inégalité précédente. Ainsi $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\|$. Soit $\varepsilon > 0$, alors $\|x - y\| < \delta = \varepsilon$ implique donc que $|d(x, A) - d(y, A)| \leq \|x - y\| \leq \delta = \varepsilon$ et donc $x \mapsto d(x, A)$ est continue.
3. On sait que si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$. Réciproquement, si $d(x, F) = 0$, alors $\inf\{\|x - a\| : a \in F\} = 0$ donc il existe une suite $(a_n)_n \subset F$ telle que $\lim_n \|x - a_n\| = 0$ et $a_n \to a$. Comme $a_n \in F$ alors nécessairement $a \in F$ car F est fermé et $a = x$. On en déduit que $x \in F$.
4. On a $\forall a \in A, b \in Bd(A, B) \leq \|b - a\|$. Ainsi, en prenant l'infimum sur les éléments de B, on obtient :

$$\forall a \in A, d(A, B) \leq \inf\{\|b - a\| : b \in B\} = d(a, B).$$

Donc en prenant l'infimim sur les éléments de A, on a

$$d(A, B) \leq \inf\{d(a, B) : a \in A\}.$$

De même,

$$\forall a \in A, \forall b \in B, d(a, B) \leq \|b - a\|,$$

et en prenant l'infimum sur les $b \in B$ et sur $a \in A$, on obtient

$$\inf\{d(a, B) : a \in A\} \leq d(A, B).$$

On a donc montré que $d(A, B) = \inf\{d(a, B) : a \in A\}$.

5. Soit F un compact non-vide de $\mathbb{R}^n$. Comme $x \mapsto d(x, F)$ est continue, cette fonction atteint son minimum sur le compact K, c'est-à-dire que

$$\exists a \in K, d(a, F) = \inf\{d(x, F) : x \in K\} = d(K, F).$$

De plus, comme F est fermé, alors il existe une suite $(b_n)_n$ qui converge vers b et telle que $d(a, b_n) \to d(a, F)$. Comme F est fermé, alors $b \in F$ et $d(a, b_n) \to d(a, b) = d(a, F)$. On a donc montré que

$$d(K, F) = d(a, b) = \|a - b\|.$$

6. Ce dernier résultat est faux si K est seulement fermé. On considère les parties fermées $F = \{(t, e^t) : t \in \mathbb{R}\}$ et $K = \{(t, -e^t) : t \in \mathbb{R}\}$. On a alors

$$d(K, F) = \inf\{\|(t, e^t) - (s, -e^s)\|_2 : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

On sait que F et K sont en fait les graphes des fonctions $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto -e^t$. Il donc est clair que $d(K, F) = 0$ en prenant la limite quand $s = t$ et $t \to -\infty$ et n'est jamais atteint pour aucun réels $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 33. Comme f est continue, alors $g : x \mapsto \|f(x) - x\|$ est aussi continue par composée de fonctions continues. Comme X est compact, alors g y atteint ses bornes, et en particulier il existe $a \in X$ tel que

$$\|f(a) - a\| = \inf\{\|f(x) - x\| : x \in X\}.$$

Ainsi, si $f(a) \neq a$, alors par hypothèse, on a

$$\|f(f(a)) - f(a)\| < \|f(a) - a\|,$$

et donc $g(f(a)) < g(a)$ ce qui contredit la minimalité de a. Cette contradiction implique que $f(a) = a$. Ce résultat est faux en général si on suppose seulement que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. Par exemple, si X est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$ et f est la rotation d'angle $\pi/2$ et de centre $(0, 0)$. Alors on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ et il n'existe aucun a tel que $f(a) = a$.

Exercice 34. Par définition, on sait que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon, d(x, x_n) < \varepsilon.$$

Soit $\{U_i : i \in I\}$ un recouvrement d'ouverts de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$. Alors soit

$$\varepsilon := \inf\{diam(U_i) : x \in U_i\} > 0.$$

Alors on peut recouvrir l'ensemble infini $\{x_n : n > N_\varepsilon\}$ par un seul des ouverts du recouvrement. De plus, l'ensemble

$$\{x_n : n \leq N_\varepsilon\}$$

peut lui aussi être recouvert seulement par un nombre fini d'ouverts du recouvrement (il suffit de ne garder qu'un seul ouvert contenant x_n sauf s'il en contient un ou plusieurs autres). On a donc montré que pour tout recouvrement d'ouverts de $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini, donc cet ensemble est compact.

Exercice 35.

1. On peut supposer que $X = K_1$ et $K_{n+1} \subsetneqq K_n$ pour tout n. Soit $x_n \in K_n \setminus K_{n+1}$. Alors il existe une sous-suite (x_{n_i}) qui converge vers x. Notons que $K = \cap_i K_{n_i}$ et $x \in K_{n_i}$ pour tout i. Donc, K est non-vide.
2. On suppose par l'absurd que pour tout n il existe $x_n \in K_n \setminus U$. Il existe une sous-suite (x_{n_i}) qui converge vers x. Mais $x \in K \subset U$ et U est ouvert. Donc, $x_{n_i} \in U$ si $i >> 0$. Absurd.

Exercice 36. cf TD.