Feuille d'exercices III.

Espaces métriques compacts.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\}\ , \quad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + xy + y^2 \leq 1\}\ ,$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x(1-2x)\}\ .$$

Exercice 2. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0,1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenu dans $\overline{B}(0,r)$.

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X qui converge vers $x \in X$. Montrer que l'ensemble $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 4. Soit (X,d) un espace métrique, et (x_n) une suite d'éléments de X. On dit que $\alpha \in X$ est une *valeur d'adhérence* de (x_n) s'il existe une sous-suite de (x_n) qui converge vers α.
Montrer que, si (X,d) est compact, alors (x_n) converge vers α si, et seulement si, α est la seule valeur d'adhérence de (x_n). Ce résultat demeure-t-il vrai si l'on ne suppose plus X compact ?

Exercice 5.

1. Soit $f \colon \mathbb{R}^n \to [0,+\infty[$ une fonction continue telle que $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que f admet un minimum.
2. Soit $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $g(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (a) Montrer que g est bornée.
   (b) La fonction g atteint-elle nécessairement ses deux bornes ?
   (c) Montrer que g atteint au moins l'une de ses bornes.

Exercice 6. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$ (pour une distance induite par une norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$). Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x,F) = \inf\{d(x,y) \colon y \in F\}\ .$$

1. Montrer que $x \mapsto d(x,F)$ est une fonction continue.
2. Montrer que $d(x,F) = 0$ si et seulement si x appartient à F.
3. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $x \in K$ et $y \in F$ tels que

$$d(x,y) = \inf\{d(a,b) \colon a \in K, b \in F\}\ .$$

   Ce résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ?

Exercice 7. Étant données A, B deux parties de $\mathbb{R}^n$, on définit leur somme $A+B$ par

$$A+B=\{a+b\colon a\in A, b\in B\}\ .$$

1. Montrer que si A et B sont compacts alors $A+B$ est compact.
2. Montrer que si A est compact et B est fermé alors $A+B$ est fermé.
3. Donner un exemple de deux fermés de $\mathbb{R}^n$ dont la somme n'est pas fermée.

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique, et (K_n) une suite de compacts non vides de X tels que $K_{n+1}\subseteq K_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On pose $K=\bigcap_n K_n$.

1. Montrer que K est compact et non vide.
2. Soit U un ouvert tel que $K\subseteq U$. Montrer qu'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $K_i\subseteq U$ pour tout $i\geq n$.

Exercice 9. Soit (X,d) un espace métrique compact, et $f\colon X\to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x,y\in X\ x\neq y\Rightarrow d(f(x),f(y))<d(x,y)\ .$$

Montrer qu'il existe $a\in X$ tel que $f(a)=a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $d(a,f(a))=\min\{d(x,f(x))\colon x\in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $d(f(x),f(y))\leq d(x,y)$ pour tout x,y ?

Exercice 10. On considère une application $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continue telle que $|f(x)| \underset{\|x\|\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

1. Montrer que si K est une partie compacte de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que si F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ alors $f(F)$ est une fermé de $\mathbb{R}$.