Feuille d'exercices III.

Parties compactes.

Exercice 1. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts dans $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^4 = 1\}\ , \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 = x^3\}\ ,$$
$$C = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in [0, 1]\}\ , \quad D = \{(\cos t, \sin t) \colon t \in]0, 1]\}.$$

Exercice 2. On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(0, 1)$ n'est pas compacte. (Indication : on pourra démontrer que la suite (X^n) n'admet pas de sous-suite convergente.)

Exercice 3. Soit A une partie compacte d'un espace vectoriel normé. On suppose que A est contenue dans la boule unité ouverte $B(0, 1)$. Montrer qu'il existe $r < 1$ tel que A soit contenue dans $\overline{B}(0, r)$.

Exercice 4. On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et on considère une partie non vide A de $\mathbb{R}^n$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ on définit

$$d(x, A) = \inf\{\|x - a\| \colon a \in A\}\ .$$

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $d(x, A) \leq d(y, A) + \|y - x\|$
2. En déduire que $x \mapsto d(x, A)$ est une fonction continue.
3. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer que dans ce cas,

   $$d(x, F) = 0 \text{ si et seulement si } x \in F.$$

4. Pour une partie non vide B de $\mathbb{R}^n$, on définit

   $$d(A, B) = \inf\{\|b - a\| \colon a \in A, b \in B\}\ .$$

   Montrer que $d(A, B) = \inf\{d(a, B) \colon a \in A\}$.
5. Soit K un compact non vide de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe $a \in K$ et $b \in F$ tels que

   $$d(K, F) = \|b - a\|.$$

6. Ce dernier résultat est-il encore vrai si l'on suppose simplement K fermé ? (Indication : on pourra considérer les parties $A = \{(t, e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(t, -e^t) \colon t \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$.)

Exercice 5. Soit X une partie compacte de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, et $f \colon X \to X$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in X\ x \neq y \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|\ .$$

Montrer qu'il existe $a \in X$ tel que $f(a) = a$ (indication : on pourra considérer, après avoir justifié son existence, a tel que $\|f(a) - a\| = \min\{\|f(x) - x\| \colon x \in X\}$).
Ce résultat reste-t-il vrai si l'on suppose seulement que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout x, y ?