Feuille d'exercices III.

Correction partielle.

Exercice 1. à 4 (cf. TD)

Exercice 4.

1. Même si Ω est dénombrable, une tribu sur Ω ne peut pas l'être. L'exemple le plus facile est $\mathcal{P}(\Omega)$ qui selon Exercice III.2.1 est une tribu, mais qui n'est pas dénombrable selon les résultats de la fiche I de TD.
2. Les propriétés données ici sont équivalentes à celles utilisées dans la définition de tribu.
   La règle (b) est identiques à celle utilisée dans la définition. Si $\emptyset \in \mathcal{T}$, alors par (b), $\Omega = \emptyset^c \in \mathcal{T}$, càd, $\mathcal{T}$ satisfait la première propriété d'une tribu.
   Pour la propriété trois, soit $\big(A_n\big)_n \subset \mathcal{T}$, alors par propriété (b), $A_n^c \subset \mathcal{T}$ quelque soit $n \in \mathbb{N}$ et à cause de propriété (c), $\cap_n A_n^c \in \mathcal{T}$. À nouveau par (b), $\Big(\cap_n A_n^c\Big)^c \in \mathcal{T}$ et par une des règles vues au TD 1, $\Big(\cap_n A_n^c\Big)^c = \cup_n \big(A_n^c\big)^c = \cup_n A_n \in \mathcal{T}$ prouvant la propriété trois.

Exercice 5. Soit $\mathcal{E}$ une partie de Ω et $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ la **tribu engendrée par** $\mathcal{E}$, càd, la plus petite tribu sur Ω contenant $\mathcal{E}$ (plus petite dans le sens que si $\mathcal{T}'$ est une autre tribu contenant $\mathcal{E}$, alors forcement $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}'$).
On veut montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$.
Nous allons d'abord montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ contient $\mathcal{E}$: Soit $A \in \mathcal{E}$, alors $A^c \in \mathcal{E}^c \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$. Étant une tribu, $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ est stable par complémentaire, donc $A = (A^c)^c$ appartient aussi à $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$.
Comme $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$, on a par définition que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$.
Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, on peut définir $(\mathcal{E}^c)^c = \{A^c : A \in \mathcal{E}^c\}$. L'argument ci-dessus montre alors que $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c) \subset \mathcal{T}\big((\mathcal{E}^c)^c\big)$, mais il es facile de vérifier que $(\mathcal{E}^c)^c = \mathcal{E}$, donc $\mathcal{T}\big((\mathcal{E}^c)^c\big) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Exercice 6. Soit $A \subset \Omega$ et $\mathcal{E} = \{A\}$, alors $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$.
La collection $\mathcal{B} = \big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$ contient A et est une tribu, car $\Omega \in \mathcal{B}$, si $B \in \mathcal{B}$, alors $B^c \in \mathcal{B}$: on vérifie cette propriété simplement en considérant le complémentaire de chacun des quatre éléments de $\mathcal{B}$. La stabilité par union dénombrable se réduit à la stabilité par union finie, car $\mathcal{B}$ est fini. On peut alors facilement vérifier toutes les combinaisons possibles de union possibles.
Par définition ça montre que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$. Suppose maintenant $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \neq \big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$, alors il faut qu'un des éléments de $\big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$ manque dans $\mathcal{T}(\mathcal{E})$, mais $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ par définition de tribu engendrée ; $\Omega \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$ par définition de tribu ; et $\emptyset = \Omega^c$ et A^c doivent être dans $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ parce qu'une tribu est stable par complémentaire.
On obtient $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \big\{\emptyset, A, A^c, \Omega\big\}$.

Exercice 7. à 10 (cf. TD)

Exercice 11. Si $(\Omega,\mathcal{U})$ est un espace topologique, alors la tribu borélienne est celle qui est engendrée par la topologie, càd, $\mathcal{B}\big((\Omega,\mathcal{U})\big) = \mathcal{T}(\mathcal{U})$. Ici $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ est la tribu borélienne sur $\mathbb{R}^n$ par rapport à la topologie standard.

1. $U \subset \Omega$ est un ouvert ssi $U \in \mathcal{U}$, donc par définition $U \in \mathcal{T}(\mathcal{U}) = \mathcal{B}\big((\Omega,\mathcal{U})\big)$.
   $A \subset \Omega$ est fermée si et seulement si A^c est ouvert, donc $A^c \in \mathcal{B}\big((\Omega,\mathcal{U})\big)$ et par stabilité sous complémentaire, $A = (A^c)^c$ doit aussi appartenir à $\mathcal{B}\big((\Omega,\mathcal{U})\big)$. On obtient que tout ouvert ou fermé est un borélien.
2. Non, la réunion d'un ouvert et d'un fermé n'est généralement ni ouvert ni fermée. Exemple : $]-1,1[$ et $[0,2]$ mais $]-1,1[\cup[0,2] \;=\;]-1,2]$ n'est ni ouvert ni fermé, mais est bien un borélien comme union de deux boréliens.
3. Oui, un intervalle est un borélien car tout intervalle est de la forme
   — $[a,b]$ ou $\{a\}$, ou ∞ ou $[a,\infty[$ ou $]-\infty,b]$ qui sont fermés donc des boréliens ;
   — $]a,b[$ ou $]a,\infty[$ ou $]-\infty,b[$ sont ouverts ;
   — $]a,b]$ et $[a,b[$ peuvent être obtenus comme réunion d'un intervalle fermé avec un intervalle ouvert.

Exercice 12. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. cf TD
2. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \cos(\tan(x))\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$. On va montrer que c'est le cas
   Méthode 1 : tan est définie sur l'ouvert $U = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$ qui est un ouvert $\mathbb{R}$ (comme union d'intervalles ouverts). $g(x) = \sin(x) - \cos(\tan(x))$ est continue sur U donc $A = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de U comme image réciproque d'un fermé (le singleton $\{0\}$) par une application continue. Donc $A = \overline{A}^{\mathbb{R}} \cap U$ est l'intersection d'un fermé et d'un ouvert (donc de 2 boréliens) donc est borélien.

   Méthode 2 : On montre que cet ensemble est une union dénombrable de fermés (en fait une analyse plus détaillé montrerait qu'il est dénombrable). tan est définie sur l'ouvert $U = \cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\pi/2+k\pi, \pi/2+k\pi[$.
   Sur chaque intervalle, *tan* est strictement croissante continue donc bijective de $]-\pi/2,\pi/2[$ vers son intervalle image (qui est $\mathbb{R}$ vu les limites de tangentes), donc il existe un unique $a_n \in]-\pi/2,\pi/2[$ tel que $\tan(a_n) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ et $]-\pi/2,\pi/2[= \cup_{n\in\mathbb{Z}}[a_n,a_{n+1}]$. $g(x) = \sin(x) - \cos(\tan(x))$ est continue de $[a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi] \to \mathbb{R}$ donc $A \cap [a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi] = g^{-1}(\{0\}) \cap [a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi]$ est fermé (de $[a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi]$ donc de $\mathbb{R}$) comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Finalement,
   $A = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \cup_{n\in\mathbb{Z}} [a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi] \cap A$ est union dénombrable de fermés donc borélien. En fait, tous les $[a_n+k\pi, a_{n+1}+k\pi] \cap A$ sont non vide (par exemple en examinant les bornes et en appliquant le thm des valeurs intermédiaires. ce sont même des singletons) et si $b_n \in [a_n,a_{n+1}] \cap A$, $b_n \to \pi/2$ donc A n'est PAS fermé dans $\mathbb{R}$.
3. cf TD

Exercice 13. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}\Big(\{]-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}\Big)$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $]-\infty, a]$ appartient à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ parce que son complémentaire est un ouvert. Ceci montre que $\mathcal{T}\Big(\{]-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}\Big) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
Pour montrer l'égalité, il faut voir que $\mathcal{T}\Big(\{]-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}\Big)$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}$. Souvenons-nous qu'un ouvert de $\mathbb{R}$ peut être obtenu comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (si U ouvert, choisie pour chaque $x \in U \cap \mathbb{Q}$ un intervalle ouvert centré en x contenu dans U qui soit assez grand).
Il suffit donc de montrer que $\mathcal{T}\Big(\{]-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}\Big)$ contient tous les intervalles ouverts.
Par définition d'une tribu, $]a,\infty[\, = \,]-\infty,a]^c$ appartient à $\mathcal{T}\Big(\{]-\infty,a], a \in \mathbb{R}\}\Big)$. Pour montrer que $]-\infty,b[$ est dans la tribu, nous l'écrivons comme union finie de $\cup_n]-\infty,b-1/n]$.
Ceci montre que l'intervalle ouvert $]a,b[$ est dans la tribu comme intersection $]a,\infty[\,\cap\,]-\infty,b[$.

Exercice 14. $(\Omega,\mathcal{T})$ espace mesurable. Vérifier que $A \subset \Omega$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice 1_A est borélienne.
"$\Leftarrow$" : Si 1_A est borélienne, càd mesurable, alors pour tout $U \subset \mathbb{R}$ borélien, $1_A^{-1}(U) \subset \Omega$ est par définition mesurable. $\{1\} \subset \mathbb{R}$ est un borélien car fermé. En particulier, $1_A^{-1}(\{1\}) = A$ est mesurable.
"$\Rightarrow$" : Si A est mesurable, A^c l'est aussi. Soit $U \subset \mathbb{R}$ borélien. Si U contient 0 et 1, alors $1_A^{-1}(U) = \Omega$; si U ne contient ni 0 ni 1, alors $1_A^{-1}(U) = \emptyset$; si U contient 1 mais pas 0, alors $1_A^{-1}(U) = A$; et si U contient 0 mais pas 1, alors $1_A^{-1}(U) = A^c$. Dans tout ces 4 cas, l'image réciproque d'un borélien est mesurable, donc 1_A est borélienne.

Exercice 15. $(\Omega,\mathcal{T})$ espace mesurable. Décrire les fonctions mesurables de $(\Omega,\mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$;
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

(1) Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et soit $x \in \Omega$ avec $c := f(x)$ son image.
Le singleton $\{c\} \subset \mathbb{R}$ est un borélien, càd, $f^{-1}(\{c\})$ doit être ou bien Ω ou $\emptyset$. Mais comme $x \in f^{-1}(\{c\})$, la deuxième option est éliminée et on déduit que l'application f est constante avec $f(y) = c$ quelque soit $y \in \Omega$.
Dans ce cas, les seules fonctions borélienne sont les fonctions constantes.
(2) Soit $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque, alors $f^{-1}(U) \in \mathcal{P}(\Omega)$, peu importe que $U \subset \mathbb{R}$ soit borélien ou pas. On obtient que toute fonction est mesurable.

Exercice 16. Soit $(\Omega,\mathcal{T})$ un espace mesurable. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Une fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
2. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et si $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée alors $g \circ f$ est étagée.
3. Si $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé alors f est mesurable.
4. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est borélienne.

5. La fonction $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable si est seulement si $|f|$ est mesurable.

(1) Non, pas vrai : on a vu pour exo 15.(1) que si $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors les seules fonctions mesurables sont celles qui sont constantes. Les fonctions étagées sont mesurables, l'énoncé est donc faux dans ce cas dés que la fonction prend deux valeurs ou plus.
(2) Oui, c'est vrai. La composition $g \circ f$ est mesurable. Soit $\{c_1, \dots, c_N\}$ l'image de g. Nous trouvons des parties mesurables $A_j = (g \circ f)^{-1}(\{c_j\})$ (possiblement vides) avec $A_j \cap A_k = (g \circ f)^{-1}(\{c_j\}) \cap (g \circ f)^{-1}(\{c_k\}) = (g \circ f)^{-1}(\{c_j\} \cap \{c_k\}) = \emptyset$ si $j \neq k$.
En particulier pour tout $x \in \Omega$

$$g \circ f(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \, 1_{A_j}(x) \ ,$$

est une fonction étagée car les A_j sont disjoints.
(3) Vrai, car $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est la tribu engendrée par les ouverts, mais il est facile à se convaincre (cf. exo 5) que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est également engendrée par les fermés car le complément d'un fermé est un ouvert et le complément d'un ouvert est un fermé.
On a vu au cours que pour tester si $g\colon (X, \mathcal{T}) \to \big(Y, \mathcal{T}(\mathcal{E})\big)$ est mesurable par rapport à une tribu $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ engendrée par $\mathcal{E}$, il suffit de tester si $f^{-1}(E) \subset X$ est mesurable pour tout $E \in \mathcal{E}$.
(4) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction $g(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$. Nous allons montrer que g est mesurable. On a vu en exo 13, que la collection de toutes les intervalles $]-\infty, b]$ pour $b \in \mathbb{R}$ engendre la tribu borélienne. Pour montrer que g est mesurable, considère

$$g^{-1}\big(]-\infty, b]\big) = \begin{cases} B = [1/b, 0[& \text{si } b < 0; \\ B =]-\infty, 0] & \text{si } b = 0; \\ B =]-\infty, 0] \cup [1/b, \infty[& \text{si } b > 0. \end{cases}$$

Dans les trois cas, B est mesurable.
Comme f et g sont mesurables, alors la composition $g \circ f = \frac{1}{f}$ l'est aussi.
(5) Faux, car soit $A \subset \Omega$ non mesurable, alors $f(x) := 1_A(x) - 1_{A^c}(x)$ n'est pas borélienne. Par contre $|f|$ est la fonction constante à valeur 1.
Par contre, si f est mesurable, alors $|f|$ l'est aussi, car c'est une composition de f mesurable avec $x \mapsto |x|$ qui est continue.

Exercice 17. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Montrons que $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ est borélienne si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :

1. Pour tout $a \leq b$, $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \leq a\}) \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \geq a\}) \in \mathcal{T}$.

Par la caractérisation de la mesurabilité en terme de famille génératrice une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ si et seulement si $f^{-1}(E) \in \mathcal{T}$, pour tout $E \in \mathcal{E}$ dès que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vous avez vu en cours que $\mathcal{E} = \{[a, b], a \leq b\}$ convient comme famille génératrice d'où le 1. Les deux autres cas viennent de l'exercice 13 qui dit que $\mathcal{E} = \{\{y \leq a\}, a \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E} = \{\{y \geq a\}, a \in \mathbb{R}\}$ sont génératrices des boréliens.

Exercices plus difficiles.

Exercice 18. 1. Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu. on a $\mathcal{T}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{T}_n$ donc l'union est $\mathcal{T}_n$ qui est bien une tribu.

2. Ce résultat est faux pour une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{T}_n$ la tribu engendrée par $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})$. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$ (c'est évident vu $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\}) \subset \mathcal{P}(\{0, \cdots, n+1\})$ donc en passant aux tribus engendrés $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$).

   Montrons que l'exemple proposé $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu. Pour cela on commence par le calculer plus explicitement. On va se ramener en deux étapes à l'exercice 7.

a/ Montrons que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}\})$.
Notons que $\mathcal{T}_n \supset \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}\})$ (par croissance de la tribu engendrée) et $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}\})$ car toute partie de $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})$ est union finie de singletons de $\{\{0\}, ...\{n\}\}$ donc $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\}) \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}\})$ et on a le résultat en passant à la tribu engendrée.
b/ Montrons que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}, \mathbb{N}\backslash\{0, ..., n\}\})$. En effet $\mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}\}) \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}, \mathbb{N}\setminus \{0, ..., n\}\}$ par croissance de la tribu engendrée et $\{0, ..., n\} \in \mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})$ donc son complémentaire $\mathbb{N} \setminus \{0, ..., n\} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\}))$. Ainsi en passant à la tribu engendré on obtient l'inclusion inverse $\mathcal{T}(\{\{0\}, ...\{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, ..., n\}\}) \subset \mathcal{T}_n$.
c/ Comme $\{\{0\}, ...\{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, ..., n\}\}$ est une partition de $\mathbb{N}$, on obtient par l'exercice 7 que

$$\mathcal{T}_n = \{J, J \cup \mathbb{N} \setminus \{0, ..., n\} : J \in \mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})\} == \{J, J^c : J \in \mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})\}.$$

Comme tout J fini est une partie de $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})$, on obtient donc que

$$\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n = \{F : F \subset \mathbb{N}, Card(F) < \infty\} \cup \{F^c : F \subset \mathbb{N}, Card(F) < \infty\}.$$

d/ Conclusion, l'ensemble P des nombres pairs a un complémentaire infini et est infini, donc $P \notin \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n$ mais par stabilité par union dénombrable :

$$P = \bigcup_{n\in P} \{n\} \in \mathcal{T}(\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n).$$

On en déduit donc que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ a.p.d. ou } A^c \text{ a.p.d.}\}.$$

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu.

   Par définition, $\mathcal{T}$ contient Ω et est stable par complémentaire. Il reste à montrer la stabilité par union dénombrable. Soit une suite $A_n \in \mathcal{T}$. Deux cas se présentent.

   Soit tous les A_n sont a.p.d., mais alors l'union dénombrable d'ensemble a.p.d. est a.p.d. donc $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.

   Deuxième cas : il y a un A_{n_0} qui n'est pas a.p.d. donc $A_{n_0}^c$ est a.p.d. Mais alors $(\cup_{n\geq 0} A_n)^c = \cap_{n\geq 0} (A_n)^c \subset A_{n_0}^c$ est aussi au plus dénombrable comme sous-ensemble d'un ensemble a.p.d. Donc on a aussi dans ce cas $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.

2. Pour montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il suffit de noter que $[0,1] \notin \mathcal{T}$ car c'est un ensemble non-dénombrable (par le cours) donc le complémentaire contient $[2,3]$ qui n'est pas dénombrable non-plus.
3. Conclusion. $[0,1] = \cup_{x \in [0,1]} \{x\}$ est une union non-dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$ qui n'est pas dans $\mathcal{T}$.

Exercice 20. (non corrigé, mais application directe des définitions)

Exercice 21. Montrons les assertions suivantes :

1. L'ensemble $\mathcal{C}_1$ des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan. Par définition il contient $\mathbb{R}$ et est stable par union fini, il faut voir qu'il est stable par complémentaire. Il est aussi facile de voir qu'une intersection fini d'intervalles est un intervalle (peut-être vide)

   On commence par remarquer que pour tout intervalle $I^c = A \cup B$ est l'union de deux intervalles (dont l'un peut être vide). Il suffit de distinguer les cas 8 cas $]-\infty, a]^c =]a, +\infty[\cup \emptyset$, $[a, b[^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[$ etc.)

   Ensuite on regarde le complémentaire d'une union de $I_1, ..., I_m$ avec $I_j^c = A_j^1 \cup A_j^2$ ce qui donne en distribuant :

$$\big(\cup_{j=1}^m I_j\big)^c = \cap_{j=1}^m I_j^c = \cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i) = \cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j}.$$

   Cette formule donne la description souhaitée comme union d'intervalles.

   Si on veut détailler plus la dernière formule, on peut procéder par récurrence sur m, le cas $m = 1$ étant évident,(la distributivité de base vue au TD1 est en ligne 2 et 4, l'hyp de rec. utilisée en ligne 3)

$$\begin{aligned}
\cap_{j=1}^{m+1} (\cup_{i=1}^2 A_j^i) &= \big(\cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i)\big) \cap (A_{m+1}^1 \cup A_{m+1}^2) \\
&= \Big(\big(\cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i))\big) \cap A_{m+1}^1\Big) \cup \Big(\big(\cap_{j=1}^{m+1} (\cup_{i=1}^2 A_j^i))\big) \cap A_{m+1}^2\Big) \\
&= \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j})\big) \cap A_{m+1}^1\Big) \cup \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\big) \cap A_{m+1}^2\Big) \\
&= \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 [(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j}) \cap A_{m+1}^1]\big)\Big) \cup \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 [(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j} \cap A_{m+1}^2]\big) \\
&= \cup_{i_{m+1}=1}^2 \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 [(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j}) \cap A_{m+1}^{i_m+1}]\big)\Big) \\
&= \cup_{i_{m+1}=1}^2 \Big(\big(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 [(\cap_{j=1}^{m+1} A_j^{i_j})]\big)\Big).
\end{aligned}$$

   C'est le résultat voulu. (en réordonnant les unions par commutativité de l'union).

2. Rappelons qu'un pavé (connexe) de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ où chaque I_k est un intervalle. Montrons que l'ensemble $\mathcal{C}_n$ des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$ est un clan. Par définition il est stable par unions finies et contient $\Omega = \mathbb{R}^n$.

   Il reste à montrer la stabilité par complémentaire. On note $(I)^{(k)} = \mathbb{R}^{k-1} \times I \times \mathbb{R}^{n-k}$ et on notera que $(I)^{(k)})^c = (I^c)^{(k)}$ Alors si $P_i = I_1^i \times \cdots \times I_n^i = \cap_{k=1}^n (I_k^i)^{(k)}$ alors en distribuant, on obtient une nouvelle formule pour l'union :

$$\cup_{i=1}^m P_i = \cup_{i=1}^m \cap_{k=1}^n (I_k^i)^{(k)} = \cap_{k_1=1}^n \cdots \cap_{k_m=1}^n \cup_{i=1}^m (I_{k_i}^i)^{(k_i)}$$

Soit en passant au complémentaire, on obtient :

$$(\cup_{i=1}^m P_i)^c = \cup_{k_1=1}^n \cdots \cup_{k_m=1}^n \cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c.$$

Il suffit de noter que l'intersection se décompose selon les valeurs de k_i :

$$\cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c = \cap_{k=1}^n \cap_{i\in[1,m],k_i=k} (((I_k^i)^c)^{(k)}) = \cap_{k=1}^n \big(\cap_{i\in[1,m],k_i=k} (I_k^i)^c \big)^{(k)}.$$

Or par la question 1, $\mathcal{C}_\infty$ est un clan donc $\cap_{i\in[1,m],k_i=k}(I_k^i)^c = U_1^k \cup \cdots \cup U_{l_k}^k \in \mathcal{C}_1$ et en redistribuant unions avec intersection, on obtient :

$$\cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c = \cap_{k=1}^n \big(\cup_{m=1}^{l_k} U_m^k \big)^{(k)} = \cup_{m_1=1}^{l_1} \cdots \cup_{m_n=1}^{l_n} \cap_{k=1}^n \big(U_{m_k}^k \big)^{(k)}.$$

Le dernier terme étant un pavé, on a décrit le complémentaires de départ comme union finie de ces pavés.

3. Montrons que tout élément de $\mathcal{C}_n$ est union finie de pavés d.d.d.
a/On montre d'abord (pour simplifier la récurrence ensuite) que tout union de 2 pavés A, B est union de pavés d.d.d. dont l'un est A est les autres sont inclus dans $B \setminus A$.
On va montrer ce résultat par récurrence sur la dimension n, en montrant qu'il suffit en fait de $2n$ pavés d.d.d. inclus dans $B \setminus A$ dont l'union sera exactement $B \setminus A$.
On traite le cas des segments, le cas des intervalles infinis ou ouvert est similaire.
Initialisation pour $n = 1$, $B = [a, b]$, $A = [c, d]$ si $c > b$, ils sont déjà disjoints et donc il suffit de prendre B (idem si $d < a$, il reste le cas $c \le b$ et $d \ge a$). Quatre cas se distinguent encore :
- $a \le c \le d \le b$ alors $B \setminus A = [a, c[\sqcup]d, b]$.
- $c \le a \le d \le b$ alors $B \setminus A =]d, b]$
- $c \le a \le b \le d$ alors $B \setminus A = \emptyset$
- $a \le c \le b \le d$alors $B \setminus A = [a, c[$ Dans tous les cas il suffit de 2 intervalles dans l'union.
On montre maintenant l'hypothèse de récurrence, au rang $n + 1$ en supposant le rang n, on a donc $A, B \subset R^n$ deux pavés et $B \setminus A = \sqcup_{i=1}^{2^n} C_i$. Alors, on a :

$$(B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b]) = (B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \sqcup ((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d])). \quad (1)$$

En effet, si $(x, y) \in (B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \cap ((B \setminus A) \times [a, b])$ on a $y \in ([c, d] \setminus [a, b]) \cap [a, b] = \emptyset$ donc l'intersection est bien vide.
$(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \subset (B \times [c, d])$ est évident et de même $(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \cap (A \times [a, b]) = (B \cap A) \times (([c, d] \setminus [a, b])) \cap [a, b]) = \emptyset$. donc finalement $(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \subset (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$.
L'inclusion $((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d])) \subset (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$ est similaire.
Réciproquement si $(x, y) \in (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$, soit $y \notin [a, b]$, soit ($x \notin A$ et $y \in [a, b]$) vu l'ensemble retranché.
Dans le premier cas, $(x, y) \in (B \times ([c, d] \setminus [a, b])$ et dans le second $(x, y) \in ((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d]))$ ce qui conclut la description comme union disjointe (1).

Par le cas $n = 1$ le premier terme de l'union disjointe (1) s'écrit comme union disjointe d'au plus 2 pavés (en prenant le produit avec le pavé B de la décomposition pour $([c,d] \setminus [a,b])$) Par l'hypothèse de récurrence, le deuxième terme s'écrit comme union disjointe d'au plus 2n termes disjoints (ceux pour $B \setminus A$ dont on prend le produit avec l'intervalle $([a,b] \cap [c,d])$). Conclusion, il faut donc au plus $2n + 2$ termes.

b/On conclut par une récurrence sur le nombre de pavés N de l'union de départ. Le cas $N = 1$ est évident, le cas $N = 2$ déjà vu au a. Soit $(A_k)_{1 \le k \le N}$ une suite de pavés par l'hyp. de réc. on sait écrire

$$\cup_{k=1}^{N-1} A_k = \sqcup_{i=1}^{m} B_i$$

Maintenant, par le a/, on a $D_1^i, ..., D_{m_i}^i$ pavés d.d.d inclus dans B_i tels que $B_i \cup A_n = A_n \cup \cup_{j=1}^{m_i} D_j^i$ est les ensembles sont d.d.d. La famille $A_n, D_j^i, i = 1, ..., n-1, j = 1, ..., m_i$ est en fait d.d.d $D_j^i \cap D_{j'}^i = \emptyset$ par construction pour $j \neq j'$ et $D_j^i \cap D_{j'}^{i'} \subset B_i \cap B_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$ sinon. Et tous les ensembles sont disjoints de A_N. Donc, on obtient l'union (dont le dernier terme est d.d.d) :

$$\cup_{k=1}^{N} A_k = \cup_{i=1}^{m} (B_i \cup A_k) = \cup_{i=1}^{m} (A_N \cup \cup_{j=1}^{m_i} D_j^i) = A_N \sqcup \left(\sqcup_{i=1}^{m} \sqcup_{j=1}^{m_i} D_j^i \right).$$

4. Est-ce que $\mathcal{C}_1$ est une tribu ? La même question pour $\mathcal{C}_n$, $n \ge 2$. Non (dans les deux cas) $\cup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k+1]$ est une union dénombrable d'intervalles qui n'est pas une union finie, en prenant $\cup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k+1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ on obtient le même résultat dans toute dimension.

Exercice 22. 1. Soit Ω un ensemble infini et $\mathcal{C}$ la famille de sous-ensembles de Ω finis ou de compléments finis. On a déjà montré à l'exo 18 que $\mathcal{C} = \bigcup_{n \ge 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu. Comme un nombre fini de membres de $\mathcal{C}$ est dans un des membres $\mathcal{T}_n$ de l'union croissante, on déduit que le leur union est dans $\mathcal{T}_n$, don dans $\mathcal{C}$ qui est bien un clan (car clairement stable par complémentaire et contient Ω par définition.

2. Soit Ω un espace topologique et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts (resp. des fermés) de Ω. Est-ce que $\mathcal{C}$ est un clan ? une tribu ? Réponse ni l'un ni l'autre, par exemple pour $\Omega = \mathbb{R}$, les fermés et les ouverts ne sont pas stables par complémentaire.

Exercice 23. Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. (cf exo 8)
2. Montrons que $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$. Par l'exo 22.1, le membre de droite est un clan qui contient$\mathcal{E}$ d'où l'inclusion $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$. Réciproquement,
3. En déduire que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{C}(\mathcal{E})$. C'est évident comme à l'exo 22.1, les nombres pairs $P \notin \mathcal{C}(\mathcal{E})$ mais sont une partie de $\mathbb{N}$ donc dans $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.
4. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

   D'abord, appartient toujours à la tribu engendré et aussi à la classe monotone engendré car $\Omega \subset \Omega$, donc $\Omega \setminus \Omega = \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Conclusion, on a

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}),$$

où l'égalité du milieu vient du lemme de classe monotone car $\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ est stable par intersection finie (contrairement à $\mathcal{E}$).

Exercice 24. Soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. telle que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
Indication : Montrons que $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. tel que $B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})\}$ est une tribu qui contient $\mathcal{E}$.
On doit vérifier les trois parties de la définition :
-On a $\Omega \in \mathcal{T}$ car $\Omega \in \mathcal{T}(\{A\})$ (par exo 6) pour tout $A \in \mathcal{E}$ (on a même $\Omega \in \mathcal{T}(\emptyset)$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ est une partie a.p.d. contenu dans $\mathcal{E}$.
-(stabilité par complémentaire) si $B \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ et donc $B^c \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ avec le $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ a.p.d.
-(stabilité par unions dénombrables)
SI $A_n \in \mathcal{T}$, on a $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}$ a.p.d. tel que $A_n \in \mathcal{T}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{T}(\cup_{n\geq 0}\mathcal{B}_n)$. Donc par stabilité par unions dénombrables de cette tribu,

$$\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}(\cup_{n\geq 0}\mathcal{B}_n).$$

Mais $\cup_{n\geq 0}\mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}$ est a.p.d. (par union dénombrable de parties a.p.d.) et donc par définition $\cup_{n\geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.
Conclusion :
Il suffit de montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$, par construction, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et convient de voir que c'est une tribu, donc il suffit de vérifier l'inclusion de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{T}$ pour déduire $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}(\mathcal{E})$ (comme plus petite tribu contenant $\mathcal{E}$).
Mais c'est évident car il suffit de prendre pour $E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \{E\}$ est une partie finie donc a.p.pd de $\mathcal{E}$ et $E \in \mathcal{T}(\{E\})$. Donc $E \in \mathcal{T}$.

Exercice 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que pour tout $a < b$, $f^{-1}([a, b])$ est un intervalle. Si $x, y \in f^{-1}([a, b])$ alors par croissance pour $x < t < y$ on a $f(x) \leq f(t) \leq f(y)$ donc $f(t) \in [a, b]$, donc $t \in f^{-1}([a, b])$. Donc $f^{-1}([a, b])$ est bien un intervalle.
2. Montrer que f est borélienne. Par l'exercice 17, il suffit que l'image réciproque des intervalles fermés soient borélien, ce qui est le cas par le 1.

Exercice 26. *(Exemple d'un ensemble non-mesurable)* Si $x, y \in [0, 1]$ on écrit $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   On rappelle que l'on doit vérifier
   -la réflexivité $x \sim x$ (évident car $0 \in \mathbb{Q}$)
   - la symétrie $x \sim y$ implique $y \sim x$ (évident car $x - y \in \mathbb{Q} = -\mathbb{Q}$ ssi $y - x \in \mathbb{Q}$)
   - la transitivité $x \sim y, y \sim z$ implique $x \sim z$ (si $x - y, y - z \in \mathbb{Q}$ alors $x - z = x - y + (y - z) \in Q$) On a donc juste utilisé que $\mathbb{Q}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.
   Donc, on peut présenter $[0, 1]$ comme union des classes d'équivalence d.d.d. : $[0, 1] = \bigsqcup_{i\in I} C_i$ (toute relation d'équivalence partitionne un ensemble en classe d'équivalences d.d.d). Puis, pour chaque $i \in I$ on choisit un élément et un seul $x_i \in C_i$ (ce n'est pas si évident, cela suppose l'axiome du choix, un axiome subtil de théorie des ensembles) et on pose $A = \{x_i : i \in I\}$. Posons $A_q = q + A$, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

2. Montrons que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$. Par contraposé on montre que $A_q \cap A_r \neq \emptyset$ implique $q = r$.

   Si $x \in A_q \cap A_r$ $x = q + a_q = r + a_r$ avec $x_i \in A_i, i = q$ ou r donc $q - r = x_r - x_q$ in $\mathbb{Q}$ donc $x_r \sim x_q$ donc ils représentent deux éléments de la même classe donc $x_q = x_r$ puisque on a pris un seul élément par classe pour définir A. Donc $q - r = x_r - x_q = 0$.

3. Montrons que $[0,1] \subset \underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q \subset [-1,2]$.

   D'abord $A_q \subset q + [0,1]$ donc $\underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q \subset \underset{q \in [-1,1]}{\cup} q + [0,1] = [-1,1] + [0,1] = [-1,2]$

   Pour l'autre inclusion, on utilise la décomposition $[0,1] = \underset{i \in I}{\sqcup} C_i$ mais $C_i \subset (x_i + \mathbb{Q}) \cap [0,1]$ donc $y \in C_i$ s'écrit $y = x_i + q_i$ et $|q_i| = |y - x_i| \leq |y - 1/2| + |1/2 - x_i| \leq 1/2 + 1/2$ par l'inégalité triangulaire (vu la description comme boule boule $[0,1] = \overline{B(1/2, 1/2)}$). DOnc $q_i \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ et $C_i \subset (x_i + \mathbb{Q} \cap [-1,1])$.

   En bilan $[0,1] = \underset{i \in I}{\cup} C_i \subset \underset{i \in I}{\cup} (x_i + \mathbb{Q} \cap [-1,1]) \subset A + (\mathbb{Q} \cap [-1,1]) = \underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q$.

4. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En supposant A borélien montrer que $\lambda(A_q) = \lambda(A)$. (Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue)

5. En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$.

   Par croissance des mesures l'inclusion du 3 donne $1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda(\underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q) \leq \lambda([-1,1]) = 3$.

   Si A est borélien, c'est aussi le cas de A_q (par continuité de la translation $q + A = f^{-1}(A)$ avec $f(x) = x - q$) l'union ci-dessus est disjointe par le 2 et donne donc $\lambda(\underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} \lambda(A) = \infty \lambda(A)$.

6. Si A est borélien, la borne supérieur implique $\lambda(A) \leq 3/\infty = 0$ ce qui contredit la borne inférieur vu $\lambda(\underset{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]}{\cup} A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} 0 = 0 < 1$.

   La contradiction conclut que A ne pouvait pas être borélien.

Remarque : En fait, on montre plus, à savoir que A n'est pas mesurable pour la tribu complétée de la mesure de Lebesgue. On ne peut pas construire de tels ensembles A sans utiliser l'axiome du choix pour sélectionner un membre d'une classe d'équivalence comme ci-dessus. C'est un axiome hautement non-constructif (on ne peut pas programmer la fonction indicatrice de A sur un ordinateur). Il est indépendant des autres axiomes de la théorie des ensembles et il existe un modèle un peut étrange (le modèle de Solovay) dans lequel tout ensemble de réels est mesurable pour la tribu complété de Lebesgue (mais il y a toujours des parties non-boréliennes dans tout modèle donc le résultat de l'exercice précédent est toujours valide mais avec une autre preuve...). Les mathématiciens préfèrent en général vivre avec la complexité supplémentaire des ensembles non-Lebesgue mesurables, qui sont tout de même plus simple que de comprendre le modèle de Solovay...