Feuille d'exercices III.

Clans, tribus, classes monotones, fonctions mesurables

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ un clan. Montrer les assertions suivantes.

1. Si $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{C}$ alors $\cap_i A_i \in \mathcal{C}$.
2. Si $A, B \in \mathcal{C}$ alors $A \setminus B \in \mathcal{C}$.

Exercice 2. Montrer les assertions suivantes.

1. $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu ;
2. Le sous-ensemble $\{\emptyset, \Omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est à la fois un clan et une tribu, appelé le clan ou la tribu triviale.
3. Si Ω est fini alors chaque clan sur Ω est une tribu.
4. $\Omega = \{0, 1, 2\}$, $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1, 2\}\}$ et $\mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{1\}, \{0, 2\}\}$. Alors $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont des tribus mais $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ n'est pas une tribu (car $\{0, 1\} \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$).

Exercice 3. Soit $\mathcal{T}$ une tribu et (A_n) une suite dans $\mathcal{T}$. Monter que $\cap_i A_i \in \mathcal{T}$.

Exercice 4. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si Ω est dénombrable alors chaque tribu sur Ω est a.p.d.
2. Une partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu si elle vérifie :
   (a) $\emptyset \in \mathcal{T}$;
   (b) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$;
   (c) $A_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$.

Exercice 5. Soient $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ où $\mathcal{E}^c = \{A^c : A \in \mathcal{E}\}$.

Exercice 6. Montrer que $\mathcal{T}(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{E} = (A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de Ω (c'est à dire les A_i sont deux à deux disjoints et leur union est Ω). Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \{\cup_{i\in J} A_i : J \subset I\}$.

Exercice 8. Si Ω est dénombrable, montrer que $\mathcal{T}(\{\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)\}) = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 9.
1. Si $\Omega = \{1, 2, 3\}$ trouver le clan, la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$.
2. Si $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ trouver le clan, la tribu et la classe monotone engendrés par $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$.
3. Trouver une classe monotone qui n'est pas une tribu.(Indication : voir 2.)

Exercice 10. Déterminer les tribus engendrées dans Ω par les familles $\mathcal{E}$ suivantes :

1. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\{\mathbb{Z}\}\}$;
2. $\Omega = \mathbb{R}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{Z}\}$;
3. $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \cdots\}$.

Exercice 11. On travaille avec la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.
Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Un ouvert ou un fermé est un borélien.
2. Un borélien est un ouvert ou un fermé.
3. Un intervalle quelconque est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 12. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. L'ensemble $[2, 3[\cap\mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
2. L'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \cos(e^x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
3. Si $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et si $A \subset B$ alors $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (Voir l'exercice 25.)

Exercice 13. Montrer que

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}\Big(\{]-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}\Big) = \mathcal{T}\Big(\{[a, +\infty[, a \in \mathbb{R}\}\Big).$$

Exercice 14. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Vérifier que $A \subset \Omega$ est mesurable si et seulement si sa fonction indicatrice 1_A est borélienne.

Exercice 15. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Décrire les fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{T})$ dans $\mathbb{R}$ dans les cas suivants.

1. $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$;
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 16. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
2. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est mesurable et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée alors $g \circ f$ est étagée.
3. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathcal{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé alors f est mesurable.
4. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas alors $\frac{1}{f}$ est borélienne.
5. Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable alors $|f|$ est mesurable.
6. La fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable si est seulement si $|f|$ est mesurable.

Exercice 17. Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable. Montrer que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est borélienne si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :

1. Pour tout $a \leq b$, $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \leq a\}) \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \geq a\}) \in \mathcal{T}$.

Exercices plus difficiles.

Exercice 18.

1. Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.
2. Ce résultat est faux pour une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathcal{P}(\{0, \cdots, n\})$. Montrer que $\mathcal{T}_n$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$ mais que $\bigcup_{n\geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ a.p.d. ou } A^c \text{ a.p.d.}\}.$$

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.
3. Conclure.

Exercice 20.

1. Chaque tribu est une classe monotone.
2. Soit $\mathcal{A}$ une tribu (resp. un clan, resp. une classe monotone) sur Ω et soit $X \subset \Omega$. Alors $\mathcal{A}_X = \{A \cap X : A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu (resp.un clan, resp. une classe monotone) sur X appelée la tribu induite (resp. le clan induit, resp. la classe monotone induite) par $\mathcal{A}$ sur X.
3. Si $X \in \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A}_X = \{A \in \mathcal{A} : A \subset X\}$.

Exercice 21. Montrer les assertions suivantes :

1. L'ensemble $\mathcal{C}_1$ des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan. De même, si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I et on considère les unions finies d'intervalles contenus dans I. Encore plus généralement, si on remplace I par $X \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ alors $\{A \cap X : A \in \mathcal{C}_1\}$ est un clan sur X (le clan induit par $\mathcal{C}_1$).
2. Rappelons qu'un pavé (connexe) de $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ où chaque I_k est un intervalle. L'ensemble $\mathcal{C}_n$ des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$ est un clan.
3. Tout élément de $\mathcal{C}_n$ est union finie de pavés d.d.d.
4. Est-ce que $\mathcal{C}_1$ est une tribu ? La même question pour $\mathcal{C}_n$, $n \geq 2$.

Exercice 22.

1. Soit Ω un ensemble infini et $\mathcal{C}$ la famille de sous-ensembles de Ω finis ou de compléments finis. Alors $\mathcal{C}$ est un clan qui n'est pas une tribu ;
2. Soit Ω un espace topologique et $\mathcal{C}$ l'ensemble des ouverts (resp. des fermés) de Ω. Est-ce que $\mathcal{C}$ est un clan ? une tribu ?

Exercice 23. Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Montrer que $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$.
3. En déduire que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{C}(\mathcal{E})$.

4. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

Exercice 24. Soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. telle que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.
(Indication : Montrer que $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. tel que $B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})\}$ est une tribu qui contient $\mathcal{E}$.)

Exercice 25. *(Exemple d'un ensemble non-mesurable)* Si $x, y \in [0,1]$ on écrit $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
   Donc, on peut présenter $[0,1]$ comme union des classes d'équivalence d.d.d. : $[0,1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$. Puis, pour chaque $i \in I$ on choisit un élément et un seul $x_i \in C_i$ et on pose $A = \{x_i : i \in I\}$. Posons $A_q = q + A$, $\forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.
2. Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.
3. Montrer que $[0,1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.
4. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En supposant A borélien montrer que $\lambda(A_q) = \lambda(A)$.
5. En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$.
6. Conclure que A ne pourrait pas être borélien.