

Feuille d'exercices III.

Correction partielle.

Exercice 1. Soit \mathcal{C} un clan alors :

1. Comme $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}$, on a $A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{C}$ et donc

$$\left(\bigcup_{i=1}^n A_i^c \right)^c = \bigcap_{i=1}^n A_i \in \mathcal{C}.$$

2. Comme $B \in \mathcal{C}$, on a $B^c \in \mathcal{C}$ et ainsi, pour tout $A \in \mathcal{C}$,

$$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{C}.$$

Exercice 2. 1. Le fait que $\mathcal{P}(\Omega)$ soit une tribu est évident car elle contient Ω, \emptyset , est stable par complémentaire et union quelconque.

2. Le sous-ensemble $\{\Omega, \emptyset\}$ est clairement une tribu car il contient Ω ainsi que son complémentaire \emptyset et il est stable par union quelconque.

3. Si Ω est finie, alors toute union finie d'un clan est aussi une union quelconque et donc tout clan est une tribu.

4. $\mathcal{C}_1 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1, 2\}\}$ est une tribu car :

— $\Omega = \{0, 1, 2\} \in \mathcal{C}_1$;

— Les complémentaires de chaque élément de \mathcal{C}_1 appartient à \mathcal{C}_1 : $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{C}_1$, $\Omega^c = \emptyset \in \mathcal{C}_1$, $\{0\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{C}_1$ et $\{1, 2\}^c = \{0\} \in \mathcal{C}_1$;

— Toute union finie d'éléments de \mathcal{C}_1 appartient à \mathcal{C}_1 .

La même chose peut être vérifiée pour \mathcal{C}_2 . Par contre, on a

$$\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 = \{\emptyset, \{0, 1, 2\}, \{0\}, \{1\}, \{1, 2\}, \{0, 2\}\},$$

et $\{0\} \cup \{1\} = \{0, 1\} \notin \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ alors que $\{0\}$ et $\{1\}$ appartiennent à \mathcal{C}_2 . Donc $\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ n'est pas un clan.

Exercice 3. Si \mathcal{T} est une tribu et $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ est une suite, alors $(A_n^c)_n \subset \mathcal{T}$ et ainsi

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}.$$

Exercice 4. 1. Si Ω est dénombrable, alors chaque tribu sur Ω n'est pas a.p.d. En effet, prenons $\Omega = \mathbb{N}$ qui est dénombrable, on sait que la tribu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est non-dénombrable.

2. Si une partie $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ vérifie

(a) $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(b) $A \in \mathcal{T} \Rightarrow A^c \in \mathcal{T}$;

(c) $(A_n)_n \in \mathcal{T} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$,
alors on a $\emptyset^c = \Omega \in \mathcal{T}$ et

$$\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T},$$

et donc \mathcal{T} est une tribu.

Exercice 5. Soient (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable et $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Comme une tribu est stable par passage au complémentaire, on a $\mathcal{E}^c \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$, ce qui implique que $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$ car $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ est la plus petite tribu contenant \mathcal{E}^c . De même, $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$ et on a $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}^c)$, ce qui nous permet de conclure que $\mathcal{T}(\mathcal{E}^c) = \mathcal{T}(\mathcal{E})$.

Exercice 6. On sait que $\mathcal{T}(\{A\})$ doit nécessairement contenir Ω , son complémentaire \emptyset , A et son complémentaire A^c . On en déduit que $\{\Omega, \emptyset, A, A^c\}$ est bien la plus petite tribu contenant $\{A\}$, donc il s'agit de $\mathcal{T}(\{A\})$.

Exercice 7. Soit $\mathcal{E} = (A_i)_{i \in I}$ une partition dénombrable de Ω . Montrons que

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \left\{ A_J = \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \right\}.$$

Comme I est dénombrable, alors tout $J \subset I$ est dénombrable. On en déduit que $A_J \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. De plus, l'ensemble $\left\{ A_J = \bigcup_{j \in J} A_j : J \subset I \right\}$:

- contient $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$ comme \mathcal{E} est une partition de Ω ;
- est stable par union dénombrable, ce qui est clair par définition ;
- est stable par passage au complémentaire car \mathcal{E} est une partition, et donc pour tout $J \subset I$, $\Omega \setminus A_J = A_{I \setminus J}$.

Il s'agit de la plus petite tribu contenant \mathcal{E} , c'est donc la tribu engendrée par \mathcal{E} .

Exercice 8. Soit Ω un ensemble dénombrable, montrons que

$$\mathcal{T}(\{\{w\} \in \mathcal{P}(\Omega)\}) = \mathcal{P}(\Omega).$$

On sait que $\{w\}_{w \in \mathcal{P}(\Omega)}$ forme une partition de l'ensemble dénombrable Ω . D'après l'exercice précédent, la tribu engendrée par cet ensemble est celle donnée par les unions dénombrables des singletons $\{w\}$, il s'agit donc de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 9. 1. Soit $\Omega = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{E} = \{\{1\}\}$. Alors, pour construire la tribu (ou le clan) engendré par \mathcal{E} , on doit ajouter :

- Ω et son complémentaire \emptyset ,
- $\{1\}$ et son complémentaire $\Omega \setminus \{1\} = \{2, 3\}$,
- toutes les unions dénombrables (ici finies) entre éléments de la tribu et leurs complémentaires, mais ici ils sont déjà tous pris en considération.

On a donc $\mathcal{C}(\{\{1\}\}) = \mathcal{T}(\{\{1\}\}) = \{\emptyset, \{1, 2, 3\}, \{1\}, \{2, 3\}\}$ (comme vu dans l'Exercice 6). De plus, comme $\{\{1\}\}$ est stable par union finie, on en déduit par le théorème de la classe monotone que $\mathcal{M}(\{\{1\}\}) = \mathcal{T}(\{\{1\}\})$.

2. Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\}$. Alors, pour construire la tribu (ou le clan) engendré par \mathcal{E} , on doit ajouter :
- Ω et son complémentaire \emptyset ,
 - $\{1, 2\}, \{1, 3\}$ et leurs complémentaires $\Omega \setminus \{1, 2\} = \{3, 4\}, \Omega \setminus \{1, 3\} = \{2, 4\}$
 - toutes les unions dénombrables (ici finies) entre éléments de la tribu et leurs complémentaires.

On a donc $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\Omega)$, c'est-à-dire que toutes les parties de Ω (toutes les combinaisons d'éléments de Ω à 1, 2, 3 ou 4 éléments) y sont présentes.

Comme \mathcal{E} n'est pas stable par intersection finie, on ne peut pas utiliser le théorème de la classe monotone. On construit donc $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ "à la main". Cette classe monotone doit contenir :

- Ω et son complémentaire $\emptyset = \Omega \setminus \Omega$,
- les parties $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$,
- tous les éléments du type $A \setminus B$ quand $B \subset A$ et $A, B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Comme $\{1, 2\} \subset \Omega$ et $\{1, 3\} \subset \Omega$, on a aussi $\{3, 4\}, \{2, 4\} \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
- toutes les unions croissantes (au sens de l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{E})$. Il n'y en a pas à part Ω lui-même.

On a donc $\mathcal{M}(\mathcal{E}) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Exercice 10. (Non corrigé)

Exercice 11. 1. VRAI. Un ouvert ou un fermé est un borélien. En effet, la tribu borélienne est engendrée par les ouverts de \mathbb{R}^n . Ainsi tout ouvert appartient aux boréliens. Par stabilité d'une tribu par passage au complémentaire, on en déduit que tout fermé appartient aussi aux boréliens.

2. FAUX. En effet, un borélien n'est pas nécessairement un ouvert ou un fermé. Par exemple on a $]0, 1[\cup]1.5, 1[$ qui est l'union de deux boréliens (un ouvert et un fermé) et qui donc appartient aux boréliens par stabilité d'une tribu par union dénombrable (finie ici). Or $]0, 1[$ n'est ni fermé, ni ouvert.
3. VRAI. Un intervalle de \mathbb{R} est soit ouvert (donc un borélien), soit fermé (idem) ou soit semi-ouvert (auquel cas on l'écrit comme union d'un intervalle fermé et d'un intervalle ouvert comme dans la question précédente).

Exercice 12. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Montrons que $]2, 3[\cap \mathbb{Q}$ est un borélien. On sait que $]2, 3[$ est un borélien d'après l'exercice précédent. De plus, \mathbb{Q} est un borélien car il peut être écrit comme la réunion dénombrable

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z}^*} \left\{ \frac{a}{b} \right\}$$

où les $\{a/b\}$, avec $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$, sont des boréliens de \mathbb{R} . par stabilité de la tribu borélienne par union dénombrable, on a que $\mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Encore une fois, par stabilité par union finie d'une tribu, on en déduit que $]2, 3[\cap \mathbb{Q} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2. L'ensemble $A = \{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = \cos(\tan(x))\}$ est un borélien de \mathbb{R} . On va montrer que c'est le cas

Méthode 1 : \tan est définie sur l'ouvert $U = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$ qui est un ouvert \mathbb{R} (comme union d'intervalles ouverts). $g(x) = \sin(x) - \cos(\tan(x))$ est

continue sur U donc $A = g^{-1}(\{0\})$ est un fermé de U comme image réciproque d'un fermé (le singleton $\{0\}$) par une application continue. Donc $A = \overline{A}^{\mathbb{R}} \cap U$ est l'intersection d'un fermé et d'un ouvert (donc de 2 boréliens) donc est borélien.

Méthode 2 : On montre que cet ensemble est une union dénombrable de fermés (en fait une analyse plus détaillée montrerait qu'il est dénombrable). \tan est définie sur l'ouvert $U = \cup_{k \in \mathbb{Z}}]-\pi/2 + k\pi, \pi/2 + k\pi[$.

Sur chaque intervalle, \tan est strictement croissante continue donc bijective de $]-\pi/2, \pi/2[$ vers son intervalle image (qui est \mathbb{R} vu les limites de tangentes), donc il existe un unique $a_n \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan(a_n) = \pi n, n \in \mathbb{Z}$ et $]-\pi/2, \pi/2[= \cup_{n \in \mathbb{Z}}]a_n, a_{n+1}[$. $g(x) = \sin(x) - \cos(\tan(x))$ est continue de $[a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ donc $A \cap [a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi] = g^{-1}(\{0\}) \cap [a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi]$ est fermé (de $[a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi]$ donc de \mathbb{R}) comme image réciproque d'un fermé par une application continue. Finalement,

$A = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \cup_{n \in \mathbb{Z}} [a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi] \cap A$ est union dénombrable de fermés donc borélien. En fait, tous les $[a_n + k\pi, a_{n+1} + k\pi] \cap A$ sont non vide (par exemple en examinant les bornes et en appliquant le thm des valeurs intermédiaires. ce sont même des singletons) et si $b_n \in [a_n, a_{n+1}] \cap A, b_n \rightarrow \pi/2$ donc A n'est PAS fermé dans \mathbb{R} .

3. cf Exercice 25.

Exercice 13. Soit $\mathcal{E}_1 = \{]-\infty, a] : a \in \mathbb{R} \}$ et $\mathcal{E}_2 = \{ [a, +\infty[: a \in \mathbb{R} \}$. Montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}_1) = \mathcal{T}(\mathcal{E}_2)$.

Le même raisonnement s'applique pour les deux égalités à démontrer. On ne traite ici que le case de \mathcal{E}_1 . Il est clair que $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ car tout intervalle est un borélien. On a donc $\mathcal{T}(\mathcal{E}_1) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$. De plus, comme tout ouvert est une réunion dénombrable d'ensembles de type $]-\infty, a]$ et $]-\infty, a']^c$, on a $\mathcal{O} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}_1)$ et on en déduit que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{T}(\mathcal{E}_1)$. Par double inclusion, on a montré que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \mathcal{T}(\mathcal{E}_1)$.

Exercice 14. Montrons que A mesurable si et seulement si 1_A est borélienne. Pour cela, on rappelle que $1_A : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et que, pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a $1_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ (cf. Feuille de TD 1, Exercice 4, Question 2.).

Ainsi, si A est mesurable, c'est-à-dire que $A \in \mathcal{T}$, alors pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on a $1_A^{-1}(B) \in \{\emptyset, \Omega, A, A^c\} \subset \mathcal{T}$ et donc 1_A est une application borélienne.

Réciproquement, si 1_A est borélienne, on doit avoir, pour tout $B \subset \mathbb{R}, 1_A^{-1}(B) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\} \subset \mathcal{T}$ et donc $A \in \mathcal{T}$, ce qui veut dire que A est mesurable.

Exercice 15. 1. Si $f : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable où $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$, alors f est constante. En effet,

- Si f est constante, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \Omega, f(x) = a$. Ainsi, pour tout $B \subset \mathbb{R}$, on sait que $f^{-1}(B) = \Omega \in \mathcal{T}$ (si $a \in B$) ou $f^{-1}(B) = \emptyset \in \mathcal{T}$ (si $a \notin B$). Donc f est mesurable.
- Si f prend deux valeurs $a, b \in \mathbb{R}$, alors on a $f^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$ (par définition de a) et $f^{-1}(\{a\}) \neq \Omega$ (car f prend une autre valeur b). Donc $f^{-1}(\{a\}) \notin \mathcal{T}$ et f n'est pas mesurable.

2. Si $f : (\Omega, \mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable où $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$, alors f peut être n'importe quelle fonction car on a toujours $\forall B \subset \mathbb{R}, f^{-1}(B) \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Exercice 16. 1. VRAI. Si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs $\{a_1, \dots, a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors on définit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad A_i = f^{-1}(\{a_i\}),$$

et on remarque que $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ et que tous les A_i sont mesurables. On a donc

$$\forall x \in \Omega, \quad f(x) = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i}(x),$$

et la fonction f est donc étagée.

2. VRAI. Il est clair que $g \circ f$ prend un nombre fini de valeurs car g est étagée. On en déduit que $g \circ f$ est étagée par le point 1.
3. VRAI. En effet, $\forall F$ fermé, $f^{-1}(F) \in \mathcal{T} \iff \forall O$ ouvert, $f^{-1}(O)^c \in \mathcal{T}$ ce qui est équivalent avec le fait que f soit borélienne.
4. VRAI. $\frac{1}{f}$ est la composée de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^*$ et de $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = 1/x$. Ces deux fonctions sont mesurables et ainsi $g \circ f$ est mesurable comme composée de fonctions mesurables.
5. VRAI. C'est encore une fois une composée de fonctions mesurables (f et la valeur absolue).
6. FAUX. On peut construire une fonction f qui n'est pas mesurable alors que $|f|$. Si $\mathcal{T} = \{\emptyset, \Omega\}$ où Ω contient au moins deux points, alors, pour $a \in \Omega$, on définit $f(x) = -1$ si $x \neq a$ et $f(a) = 1$. Alors :
- f n'est pas mesurable car $f^{-1}(\{1\}) = \{a\} \notin \mathcal{T}$;
 - $|f|$ est constante (égale à 1), donc mesurable par le 1. de l'Exercice 15.

Exercice 17. Soit (Ω, \mathcal{T}) un espace mesurable. Montrons que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ est borélienne si et seulement si on a l'une des conditions équivalentes :

1. Pour tout $a \leq b$, $f^{-1}([a, b]) \in \mathcal{T}$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \leq a\}) \in \mathcal{T}$.
3. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(\{y \geq a\}) \in \mathcal{T}$.

Par la caractérisation de la mesurabilité en terme de famille génératrice une fonction $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ si et seulement si $f^{-1}(E) \in \mathcal{T}$, pour tout $E \in \mathcal{E}$ dès que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Vous avez vu en cours que $\mathcal{E} = \{[a, b], a \leq b\}$ convient comme famille génératrice d'où le 1. Les deux autres cas viennent de l'exercice 13 qui dit que $\mathcal{E} = \{\{y \leq a\}, a \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{E} = \{\{y \geq a\}, a \in \mathbb{R}\}$ sont génératrices des boréliens.

Exercices plus difficiles.

Exercice 18. 1. Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu. on a $\mathcal{T}_1 \subset \dots \subset \mathcal{T}_n$ donc l'union est \mathcal{T}_n qui est bien une tribu.

2. Ce résultat est faux pour une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$ soit \mathcal{T}_n la tribu engendrée par $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$. Montrer que \mathcal{T}_n est une suite croissante de tribus sur \mathbb{N} (c'est évident vu $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \subset \mathcal{P}(\{0, \dots, n+1\})$ donc en passant aux tribus engendrés $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}_{n+1}$).

Montrons que l'exemple proposé $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu. Pour cela on commence par le calculer plus explicitement. On va se ramener en deux étapes à l'exercice 7.

a/ Montrons que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}\})$.

Notons que $\mathcal{T}_n \supset \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}\})$ (par croissance de la tribu engendrée) et $\mathcal{T}_n \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}\})$ car toute partie de $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$ est union finie de singletons de $\{\{0\}, \dots, \{n\}\}$ donc $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\}) \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}\})$ et on a le résultat en passant à la tribu engendrée.

b/ Montrons que $\mathcal{T}_n = \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}\})$. En effet $\mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}\}) \subset \mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}\})$ par croissance de la tribu engendrée et $\{0, \dots, n\} \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$ donc son complémentaire $\mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\} \in \mathcal{T}(\mathcal{P}(\{0, \dots, n\}))$. Ainsi en passant à la tribu engendrée on obtient l'inclusion inverse $\mathcal{T}(\{\{0\}, \dots, \{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}\}) \subset \mathcal{T}_n$.

c/ Comme $\{\{0\}, \dots, \{n\}, \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\}\}$ est une partition de \mathbb{N} , on obtient par l'exercice 7 que

$$\mathcal{T}_n = \{J, J \cup \mathbb{N} \setminus \{0, \dots, n\} : J \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})\} = \{J, J^c : J \in \mathcal{P}(\{0, \dots, n\})\}.$$

Comme tout J fini est une partie de $\mathcal{P}(\{0, \dots, n\})$, on obtient donc que

$$\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n = \{F : F \subset \mathbb{N}, \text{Card}(F) < \infty\} \cup \{F^c : F \subset \mathbb{N}, \text{Card}(F) < \infty\}.$$

d/ Conclusion, l'ensemble P des nombres pairs a un complémentaire infini et est infini, donc $P \notin \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ mais par stabilité par union dénombrable :

$$P = \bigcup_{n \in P} \{n\} \in \mathcal{T}(\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n).$$

On en déduit donc que $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 19. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas forcément un ensemble mesurable. Soit

$$\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} : A \text{ a.p.d. ou } A^c \text{ a.p.d.}\}.$$

1. Montrons que \mathcal{T} est une tribu.

Par définition, \mathcal{T} contient Ω et est stable par complémentaire. Il reste à montrer la stabilité par union dénombrable. Soit une suite $A_n \in \mathcal{T}$. Deux cas se présentent. Soit tous les A_n sont a.p.d., mais alors l'union dénombrable d'ensemble a.p.d. est a.p.d. donc $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.

Deuxième cas : il y a un A_{n_0} qui n'est pas a.p.d. donc $A_{n_0}^c$ est a.p.d. Mais alors $(\bigcup_{n \geq 0} A_n)^c = \bigcap_{n \geq 0} (A_n)^c \subset A_{n_0}^c$ est aussi au plus dénombrable comme sous-ensemble d'un ensemble a.p.d. Donc on a aussi dans ce cas $\bigcup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.

2. Pour montrer que $\mathcal{T} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R})$, il suffit de noter que $[0, 1] \notin \mathcal{T}$ car c'est un ensemble non-dénombrable (par le cours) donc le complémentaire contient $[2, 3]$ qui n'est pas dénombrable non-plus.
3. Conclusion. $[0, 1]^c = \cup_{x \in [0, 1]} \{x\}$ est une union non-dénombrable d'éléments de \mathcal{T} qui n'est pas dans \mathcal{T} .

Exercice 20. (non corrigé, mais application directe des définitions)

Exercice 21. Montrons les assertions suivantes :

1. L'ensemble \mathcal{C}_1 des unions finies d'intervalles de \mathbb{R} est un clan. Par définition il contient \mathbb{R} et est stable par union fini, il faut voir qu'il est stable par complémentaire. Il est aussi facile de voir qu'une intersection fini d'intervalles est un intervalle (peut-être vide)

On commence par remarquer que pour tout intervalle $I^c = A \cup B$ est l'union de deux intervalles (dont l'un peut être vide). Il suffit de distinguer les cas 8 cas $] - \infty, a[^c =]a, +\infty[\cup \emptyset$, $[a, b[^c =] - \infty, a[\cup]b, +\infty[$ etc.)

Ensuite on regarde le complémentaire d'une union de I_1, \dots, I_m avec $I_j^c = A_j^1 \cup A_j^2$ ce qui donne en distribuant :

$$\left(\cup_{j=1}^m I_j\right)^c = \cap_{j=1}^m I_j^c = \cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i) = \cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j}.$$

Cette formule donne la description souhaitée comme union d'intervalles.

Si on veut détailler plus la dernière formule, on peut procéder par récurrence sur m , le cas $m = 1$ étant évident, (la distributivité de base vue au TD1 est en ligne 2 et 4, l'hyp de rec. utilisée en ligne 3)

$$\begin{aligned} \cap_{j=1}^{m+1} (\cup_{i=1}^2 A_j^i) &= \left(\cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i)\right) \cap (A_{m+1}^1 \cup A_{m+1}^2) \\ &= \left(\left(\cap_{j=1}^m (\cup_{i=1}^2 A_j^i)\right) \cap A_{m+1}^1\right) \cup \left(\left(\cap_{j=1}^{m+1} (\cup_{i=1}^2 A_j^i)\right) \cap A_{m+1}^2\right) \\ &= \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\right) \cap A_{m+1}^1\right) \cup \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\right) \cap A_{m+1}^2\right) \\ &= \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \left[\left(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\right) \cap A_{m+1}^1\right]\right)\right) \cup \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \left[\left(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\right) \cap A_{m+1}^2\right]\right)\right) \\ &= \cup_{i_{m+1}=1}^2 \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \left[\left(\cap_{j=1}^m A_j^{i_j}\right) \cap A_{m+1}^{i_{m+1}}\right]\right)\right) \\ &= \cup_{i_{m+1}=1}^2 \left(\left(\cup_{i_1=1}^2 \cdots \cup_{i_m=1}^2 \left[\left(\cap_{j=1}^{m+1} A_j^{i_j}\right)\right]\right)\right). \end{aligned}$$

C'est le résultat voulu. (en réordonnant les unions par commutativité de l'union).

2. Rappelons qu'un pavé (connexe) de \mathbb{R}^n est un ensemble de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_n$ où chaque I_k est un intervalle. Montrons que l'ensemble \mathcal{C}_n des unions finies de pavés de \mathbb{R}^n est un clan. Par définition il est stable par unions finies et contient $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Il reste à montrer la stabilité par complémentaire. On note $(I)^{(k)} = \mathbb{R}^{k-1} \times I \times \mathbb{R}^{n-k}$ et on notera que $(I)^{(k)c} = (I^c)^{(k)}$ Alors si $P_i = I_1^i \times \cdots \times I_n^i = \cap_{k=1}^n (I_k^i)^{(k)}$ alors en distribuant, on obtient une nouvelle formule pour l'union :

$$\cup_{i=1}^m P_i = \cup_{i=1}^m \cap_{k=1}^n (I_k^i)^{(k)} = \cap_{k_1=1}^n \cdots \cap_{k_m=1}^n \cup_{i=1}^m (I_{k_i}^i)^{(k_i)}$$

Soit en passant au complémentaire, on obtient :

$$(\cup_{i=1}^m P_i)^c = \cup_{k_1=1}^n \cdots \cup_{k_m=1}^n \cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c.$$

Il suffit de noter que l'intersection se décompose selon les valeurs de k_i :

$$\cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c = \cap_{k=1}^n \cap_{i \in [1, m], k_i = k} (((I_k^i)^c)^{(k)}) = \cap_{k=1}^n (\cap_{i \in [1, m], k_i = k} (I_k^i)^c)^{(k)}.$$

Or par la question 1, \mathcal{C}_∞ est un clan donc $\cap_{i \in [1, m], k_i = k} (I_k^i)^c = U_1^k \cup \cdots \cup U_{l_k}^k \in \mathcal{C}_1$ et en redistribuant unions avec intersection, on obtient :

$$\cap_{i=1}^m ((I_{k_i}^i)^{(k_i)})^c = \cap_{k=1}^n (\cup_{m=1}^{l_k} U_m^k)^{(k)} = \cup_{m_1=1}^{l_1} \cdots \cup_{m_n=1}^{l_n} \cap_{k=1}^n (U_{m_k}^k)^{(k)}.$$

Le dernier terme étant un pavé, on a décrit les complémentaires de départ comme union finie de ces pavés.

3. Montrons que tout élément de \mathcal{C}_n est union finie de pavés d.d.d.

a/On montre d'abord (pour simplifier la récurrence ensuite) que tout union de 2 pavés A, B est union de pavés d.d.d. dont l'un est A et les autres sont inclus dans $B \setminus A$.

On va montrer ce résultat par récurrence sur la dimension n , en montrant qu'il suffit en fait de $2n$ pavés d.d.d. inclus dans $B \setminus A$ dont l'union sera exactement $B \setminus A$.

On traite le cas des segments, le cas des intervalles infinis ou ouvert est similaire. Initialisation pour $n = 1$, $B = [a, b]$, $A = [c, d]$ si $c > b$, ils sont déjà disjoints et donc il suffit de prendre B (idem si $d < a$, il reste le cas $c \leq b$ et $d \geq a$). Quatre cas se distinguent encore :

- $a \leq c \leq d \leq b$ alors $B \setminus A = [a, c[\sqcup]d, b]$.

- $c \leq a \leq d \leq b$ alors $B \setminus A =]d, b]$

- $c \leq a \leq b \leq d$ alors $B \setminus A = \emptyset$

- $a \leq c \leq b \leq d$ alors $B \setminus A = [a, c[$ Dans tous les cas il suffit de 2 intervalles dans l'union.

On montre maintenant l'hypothèse de récurrence, au rang $n + 1$ en supposant le rang n , on a donc $A, B \subset R^n$ deux pavés et $B \setminus A = \sqcup_{i=1}^{2^n} C_i$. Alors, on a :

$$(B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b]) = (B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \sqcup ((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d])). \quad (1)$$

En effet, si $(x, y) \in (B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \cap ((B \setminus A) \times [a, b])$ on a $y \in ([c, d] \setminus [a, b]) \cap [a, b] = \emptyset$ donc l'intersection est bien vide.

$(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \subset (B \times [c, d])$ est évident et de même $(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \cap (A \times [a, b]) = (B \cap A) \times (([c, d] \setminus [a, b]) \cap [a, b]) = \emptyset$. donc finalement $(B \times ([c, d] \setminus [a, b])) \subset (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$.

L'inclusion $((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d])) \subset (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$ est similaire.

Réciproquement si $(x, y) \in (B \times [c, d]) \setminus (A \times [a, b])$, soit $y \notin [a, b]$, soit $x \notin A$ et $y \in [a, b]$ vu l'ensemble retranché.

Dans le premier cas, $(x, y) \in (B \times ([c, d] \setminus [a, b]))$ et dans le second $(x, y) \in ((B \setminus A) \times ([a, b] \cap [c, d]))$ ce qui conclut la description comme union disjointe (1).

Par le cas $n = 1$ le premier terme de l'union disjointe (1) s'écrit comme union disjointe d'au plus 2 pavés (en prenant le produit avec le pavé B de la décomposition pour $([c, d] \setminus [a, b])$) Par l'hypothèse de récurrence, le deuxième terme s'écrit comme union disjointe d'au plus $2n$ termes disjoints (ceux pour $B \setminus A$ dont on prend le produit avec l'intervalle $([a, b] \cap [c, d])$). Conclusion, il faut donc au plus $2n + 2$ termes.

b/On conclut par une récurrence sur le nombre de pavés N de l'union de départ. Le cas $N = 1$ est évident, le cas $N = 2$ déjà vu au a. Soit $(A_k)_{1 \leq k \leq N}$ une suite de pavés par l'hyp. de réc. on sait écrire

$$\cup_{k=1}^{N-1} A_k = \sqcup_{i=1}^m B_i$$

Maintenant, par le a/, on a $D_1^i, \dots, D_{m_i}^i$ pavés d.d.d inclus dans B_i tels que $B_i \cup A_n = A_n \cup \cup_{j=1}^{m_i} D_j^i$ est les ensembles sont d.d.d. La famille $A_n, D_j^i, i = 1, \dots, n-1, j = 1, \dots, m_i$ est en fait d.d.d $D_j^i \cap D_{j'}^i = \emptyset$ par construction pour $j \neq j'$ et $D_j^i \cap D_{j'}^{i'} \subset B_i \cap B_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$ sinon. Et tous les ensembles sont disjoints de A_N . Donc, on obtient l'union (dont le dernier terme est d.d.d) :

$$\cup_{k=1}^N A_k = \cup_{i=1}^m (B_i \cup A_k) = \cup_{i=1}^m (A_N \cup \cup_{j=1}^{m_i} D_j^i) = A_N \sqcup \left(\sqcup_{i=1}^m \sqcup_{j=1}^{m_i} D_j^i \right).$$

4. Est-ce que \mathcal{C}_1 est une tribu? La même question pour $\mathcal{C}_n, n \geq 2$. Non (dans les deux cas) $\cup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k+1]$ est une union dénombrable d'intervalles qui n'est pas une union finie, en prenant $\cup_{k \in \mathbb{N}} [2k, 2k+1] \times \mathbb{R}^{n-1}$ on obtient le même résultat dans toute dimension.

Exercice 22. 1. Soit Ω un ensemble infini et \mathcal{C} la famille de sous-ensembles de Ω finis ou de compléments finis. On a déjà montré à l'exo 18 que $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 0} \mathcal{T}_n$ n'est pas une tribu. Comme un nombre fini de membres de \mathcal{C} est dans un des membres \mathcal{T}_n de l'union croissante, on déduit que le leur union est dans \mathcal{T}_n , don dans \mathcal{C} qui est bien un clan (car clairement stable par complémentaire et contient Ω par définition.

2. Soit Ω un espace topologique et \mathcal{C} l'ensemble des ouverts (resp. des fermés) de Ω . Est-ce que \mathcal{C} est un clan? une tribu? Réponse ni l'un ni l'autre, par exemple pour $\Omega = \mathbb{R}$, les fermés et les ouverts ne sont pas stables par complémentaire.

Exercice 23. Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mathcal{E} = \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. (cf exo 8)
2. Montrons que $\mathcal{C}(\mathcal{E}) = \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$. Par l'exo 22.1, le membre de droite est un clan qui contient \mathcal{E} d'où l'inclusion $\mathcal{C}(\mathcal{E}) \subset \{A \subset \mathbb{N} : A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$. Réciproquement,
3. En déduire que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) \neq \mathcal{C}(\mathcal{E})$. C'est évident comme à l'exo 22.1, les nombres pairs $P \notin \mathcal{C}(\mathcal{E})$ mais sont une partie de \mathbb{N} donc dans $\mathcal{T}(\mathcal{E})$.
4. Montrons que $\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{M}(\mathcal{E})$.

D'abord, appartient toujours à la tribu engendré et aussi à la classe monotone engendré car $\Omega \subset \Omega$, donc $\Omega \setminus \Omega = \emptyset \in \mathcal{M}(\mathcal{E})$. Conclusion, on a

$$\mathcal{T}(\mathcal{E}) = \mathcal{T}(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}) = \mathcal{M}(\mathcal{E}),$$

où l'égalité du milieu vient du lemme de classe monotone car $\mathcal{E} \cup \{\emptyset\}$ est stable par intersection finie (contrairement à \mathcal{E}).

Exercice 24. Soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ et $A \in \mathcal{T}(\mathcal{E})$. Montrer qu'il existe une famille $\mathcal{A} \subset \mathcal{E}$ a.p.d. telle que $A \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$.

Indication : Montrons que $\mathcal{T} = \{B \in \mathcal{T}(\mathcal{E}) : \exists \mathcal{B} \subset \mathcal{E} \text{ a.p.d. tel que } B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})\}$ est une tribu qui contient \mathcal{E} .

On doit vérifier les trois parties de la définition :

-On a $\Omega \in \mathcal{T}$ car $\Omega \in \mathcal{T}(\{A\})$ (par exo 6) pour tout $A \in \mathcal{E}$ (on a même $\Omega \in \mathcal{T}(\emptyset)$ et $\mathcal{B} = \{\emptyset\}$ est une partie a.p.d. contenu dans \mathcal{E}).

-(stabilité par complémentaire) si $B \in \mathcal{T}$, $B \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ et donc $B^c \in \mathcal{T}(\mathcal{B})$ avec le $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ a.p.d.

-(stabilité par unions dénombrables)

Si $A_n \in \mathcal{T}$, on a $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}$ a.p.d. tel que $A_n \in \mathcal{T}(\mathcal{B}_n) \subset \mathcal{T}(\cup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n)$. Donc par stabilité par unions dénombrables de cette tribu,

$$\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}(\cup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n).$$

Mais $\cup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n \subset \mathcal{E}$ est a.p.d. (par union dénombrable de parties a.p.d.) et donc par définition $\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathcal{T}$.

Conclusion :

Il suffit de montrer que $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$, par construction, $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et convient de voir que c'est une tribu, donc il suffit de vérifier l'inclusion de \mathcal{E} dans \mathcal{T} pour déduire $\mathcal{T} \supset \mathcal{T}(\mathcal{E})$ (comme plus petite tribu contenant \mathcal{E}).

Mais c'est évident car il suffit de prendre pour $E \in \mathcal{E}$, $\mathcal{B} = \{E\}$ est une partie finie donc a.p.d de \mathcal{E} et $E \in \mathcal{T}(\{E\})$. Donc $E \in \mathcal{T}$.

Exercice 25. (*Exemple d'un ensemble non-mesurable*) Si $x, y \in [0, 1]$ on écrit $x \sim y$ si $x - y \in \mathbb{Q}$.

1. Montrer que \sim est une relation d'équivalence.

On rappelle que l'on doit vérifier

-la réflexivité $x \sim x$ (évident car $0 \in \mathbb{Q}$)

- la symétrie $x \sim y$ implique $y \sim x$ (évident car $x - y \in \mathbb{Q} = -\mathbb{Q}$ ssi $y - x \in \mathbb{Q}$)

- la transitivité $x \sim y, y \sim z$ implique $x \sim z$ (si $x - y, y - z \in \mathbb{Q}$ alors $x - z = x - y + (y - z) \in \mathbb{Q}$) On a donc juste utilisé que \mathbb{Q} est un sous-groupe additif de \mathbb{R} .

Donc, on peut présenter $[0, 1]$ comme union des classes d'équivalence d.d.d. : $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ (toute relation d'équivalence partitionne un ensemble en classe d'équivalences d.d.d). Puis, pour chaque $i \in I$ on choisit un élément et un seul $x_i \in C_i$ (ce n'est pas si évident, cela suppose l'axiome du choix, un axiome subtil de théorie des ensembles) et on pose $A = \{x_i : i \in I\}$. Posons $A_q = q + A, \forall q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$.

2. Montrons que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$. Par contraposé on montre que $A_q \cap A_r \neq \emptyset$ implique $q = r$.

Si $x \in A_q \cap A_r$ $x = q + a_q = r + a_r$ avec $x_i \in A_i, i = q$ ou r donc $q - r = x_r - x_q$ in \mathbb{Q} donc $x_r \sim x_q$ donc ils représentent deux éléments de la même classe donc $x_q = x_r$ puisque on a pris un seul élément par classe pour définir A . Donc $q - r = x_r - x_q = 0$.

3. Montrons que $[0, 1] \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q \subset [-1, 2]$.

D'abord $A_q \subset q + [0, 1]$ donc $\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q \subset \bigcup_{q \in [-1, 1]} q + [0, 1] = [-1, 1] + [0, 1] = [-1, 2]$

Pour l'autre inclusion, on utilise la décomposition $[0, 1] = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ mais $C_i \subset (x_i + \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$ donc $y \in C_i$ s'écrit $y = x_i + q_i$ et $|q_i| = |y - x_i| \leq |y - 1/2| + |1/2 - x_i| \leq 1/2 + 1/2$ par l'inégalité triangulaire (vu la description comme boule boule $[0, 1] = \overline{B(1/2, 1/2)}$). Donc $q_i \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ et $C_i \subset (x_i + \mathbb{Q} \cap [-1, 1])$.

En bilan $[0, 1] = \bigcup_{i \in I} C_i \subset \bigcup_{i \in I} (x_i + \mathbb{Q} \cap [-1, 1]) \subset A + (\mathbb{Q} \cap [-1, 1]) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q$.

4. Soit λ la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . En supposant A borélien montrer que $\lambda(A_q) = \lambda(A)$. (Par invariance par translation de la mesure de Lebesgue)

5. En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda(A) \leq 3$.

Par croissance des mesures l'inclusion du 3 donne $1 = \lambda([0, 1]) \leq \lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q) \leq \lambda([-1, 1]) = 3$.

Si A est borélien, c'est aussi le cas de A_q (par continuité de la translation $q + A = f^{-1}(A)$ avec $f(x) = x - q$) l'union ci-dessus est disjointe par le 2 et donne donc $\lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} \lambda(A) = \infty \lambda(A)$.

6. Si A est borélien, la borne supérieur implique $\lambda(A) \leq 3/\infty = 0$ ce qui contredit la borne inférieur vu $\lambda(\bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A_q) = \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} 0 = 0 < 1$.

La contradiction conclut que A ne pouvait pas être borélien.

Remarque : En fait, on montre plus, à savoir que A n'est pas mesurable pour la tribu complétée de la mesure de Lebesgue. On ne peut pas construire de tels ensembles A sans utiliser l'axiome du choix pour sélectionner un membre d'une classe d'équivalence comme ci-dessus. C'est un axiome hautement non-constructif (on ne peut pas programmer la fonction indicatrice de A sur un ordinateur). Il est indépendant des autres axiomes de la théorie des ensembles et il existe un modèle un peut étrange (le modèle de Solovay) dans lequel tout ensemble de réels est mesurable pour la tribu complétée de Lebesgue (mais il y a toujours des parties non-boréliennes dans tout modèle donc le résultat de l'exercice précédent est toujours valide mais avec une autre preuve...). Les mathématiciens préfèrent en général vivre avec la complexité supplémentaire des ensembles non-Lebesgue mesurables, qui sont tout de même plus simple que de comprendre le modèle de Solovay...