Feuille d'exercices IV.

Intégration, Théorèmes de convergence

Exercice 1. 1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x)\right) dx = \ln(2)$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 2. 1. Pour $t \in]0,+\infty[$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt}$. Calculer $f(t)$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\displaystyle\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Commenter ce résultat.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur $\mathbb{R}$. Vérifier que la suite $\displaystyle\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 6. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^t}{1+t^n} dt$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\frac{|x|}{n}) dx$.

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 8. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n\, dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3}\, dx$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0,1] \to [0,+\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

1. Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f.

2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x)dx.$$

3. Vérifier que pour tout $t \geq 0$, on a $1 - t \leq e^{-t}$.
4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
5. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx.$$

6. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Exercice 10. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. Expliquer.

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur $\mathbb{R}$ convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n\right) d\lambda.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} \text{ si } t \neq 0 \\ 1 \text{ si } t = 0 \end{cases}$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est semi-convergente.
2. Soit $k \geq 0$. Montrer que

$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (au sens de Lebesgue).
4. Une autre méthode pour montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue :
   (a) Par la même méthode que ci-dessus, montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{cos(2t)}{t} dt$ est semi-convergente.
   (b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a

$$\left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \geq \frac{\sin^2(t)}{t} = \frac{1 - \cos(2t)}{2t} .$$

   (c) En déduire que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (au sens de Lebesgue).