
Feuille d'exercices IV.
Intégration, Théorèmes de convergence

Exercice 1. 1. Montrer que $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}(1-x) \right) dx = \ln(2)$.

2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 2. 1. Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx}$. Calculer $f(x)$.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$.

Exercice 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α , déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx.$$

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ par $f_n(x) = (n+1)x^n$.

- Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Déterminer, si elle existe, la limite de la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx \right)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Commenter ce résultat.

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \frac{(\sin \pi x)^n}{1+x^2}$. Montrer que chaque fonction f_n est intégrable sur \mathbb{R} . Vérifier que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \right)_{n \in \mathbb{N}}$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 6. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^x}{1+x^n} dx$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{|x|}{n}\right) dx$.

Exercice 7. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$.

Exercice 8. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x} (\sin(x))^n dx$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{x}{n}\right)}{x^3} dx$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty[$ par $f_n(x) = n(1-x)^n \sin^2(nx)$.

- Déterminer la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On notera cette limite simple f .

2. Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \sin^2(x) dx.$$

3. Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a $1 - x \leq e^{-x}$.

4. En déduire que la suite $\left(\int_0^1 f_n(x) dx\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

5. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \neq \int_0^1 f(x) dx.$$

6. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$.

Exercice 10. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x , on pose $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est convergente et calculer sa somme $f(x)$.

2. Comparer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$. Expliquer.

Exercice 11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions positives intégrables sur \mathbb{R} convergente vers 0 presque partout.

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n$ converge presque partout vers une fonction positive f intégrable sur \mathbb{R} .

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ est convergente et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n f_n \right) d\lambda.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est semi-convergente.

2. Soit $k \geq 0$. Montrer que

$$\int_{\pi/6+2k\pi}^{5\pi/6+2k\pi} \frac{\sin x}{x} dx \geq \frac{1}{3(2k+1)}.$$

3. En déduire que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R} (au sens de Lebesgue).

4. Une autre méthode pour montrer que f n'est pas intégrable au sens de Lebesgue :

(a) Par la même méthode que ci-dessus, montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{x} dx$ est semi-convergente.

(b) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\left| \frac{\sin(x)}{x} \right| \geq \frac{\sin^2(x)}{x} = \frac{1 - \cos(2x)}{2x}.$$

(c) En déduire que f n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$ (au sens de Lebesgue).