Feuille d'exercices IV.

Espaces mesurés

Exercice 1. (Mesure de Dirac) Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace mesurable quelconque et soit $x \in \Omega$. Pour tout $A \in \mathcal{T}$ on pose

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que δ_x est une mesure de probabilité. (Indication : Pour montrer la σ-additivité, il suffit de noter que dans une union disjointe $x \in A_n$ pour un seul n, donc si $A = \bigsqcup_n A_n$, $\delta_x(A) = \delta_x(A_n) = \sum_k \delta_x(A_k)$.)

Exercice 2. (Mesure de comptage) Pour chaque $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on pose

$$\nu(A) = \begin{cases} Card(A) & \text{si } A \text{ fini} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que ν est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P}(\Omega))$. (Indication : Pour montrer la σ-additivité, il suffit de observer que si les A_n sont disjoints alors $Card(\bigsqcup_n A_n) = \sum_n Card(A_n)$. Notons que si Ω est dénombrable alors $\nu = \sum_{x \in \Omega} \delta_x$.)

Exercice 3. (Mesure sur la tribu induite) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $A \in \mathcal{T}$. Montrer que μ_A définie par $\mu_A(B) \stackrel{def}{=} \mu(A \cap B)$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$.
On peut remplacer la tribu $\mathcal{T}$ par la tribu induite $\mathcal{T}_A \stackrel{def}{=} \{A \cap B : B \in \mathcal{T}\}$. Montrer que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_A)$ et $(A, \mathcal{T}_A, \mu_A)$ sont des espaces mesurés.

Exercice 4. Si $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré et $\lambda \in \mathbb{R}^+$, montrer que $(\lambda\mu)(A) \stackrel{def}{=} \lambda\mu(A), A \in \mathcal{T}$, définie une mesure sur $\mathcal{T}$. En particulier, si $0 < \mu(A) < \infty$, montrer que $\mu_A(\cdot)/\mu(A)$ est une probabilité (appelée *la probabilité conditionnelle sachant* A).

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ alors A et B sont disjoints.
3. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
4. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 3\}$
5. Soient $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable. On suppose $\mu(\Omega) < \infty$. Soit

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \mu(\Omega) \text{ ou } \mu(A) = 0\}.$$

Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu.

Exercice 7. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $A, B \in \mathcal{T}$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie des éléments dans $\mathcal{T}$. Montrer que

1. si $\mu(A) < \infty$ alors $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$;
2. si $\mu(A) + \mu(B) > \mu(\Omega)$ alors $A \cap B \neq \emptyset$ et $\mu(A \cap B) > 0$;
3. si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ alors il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(\Omega)}{n}$.

Exercice 8. ($\star$) Supposons que la mesure μ de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est σ-finie. Montrer qu'il existe une suite $(A_n) \subset \mathcal{T}$ d.d.d. telle que $\mu(A_n) < \infty$ et $\Omega = \underset{n}{\cup} A_n$.

Exercice 9. ($\star$) Montrer que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation, i.e., $\lambda_n(A) = \lambda_n(\overrightarrow{a} + A)$ pour tout $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Exercice 10. (théorème du récurrence de Poincaré)($\star$) On suppose $\mu(\Omega) < \infty$. Une application mesurable $f : \Omega \to \Omega$ *préserve la mesure* μ si $\mu(X) = \mu(f^{-1}(X)), \forall X \in \mathcal{T}$. On pose $f^1 \overset{def}{=} f$ et $f^{n+1} \overset{def}{=} f^n \circ f, \forall n \geq 1$.

1. Montrer que f^n préserve μ pour tout $n \geq 1$.
2. On fixe un $A \in \mathcal{T}$ et on désigne $F \overset{def}{=} \{x \in A : f^n(x) \notin A, \forall n \geq 1\}$. (*$F$ est l'ensemble des points de A qui ne retournent pas à A sous l'action de f.*) Montrer que $(f^n)^{-1}(F) \cap F = \emptyset, \forall n \geq 1$.
3. Montrer que $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$ si $m \neq n$.
4. En déduire que $\mu(F) = 0$, autrement dit, pour μ-presque tout $x \in A$ il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $f^n(x) \in A$.

Exercice 11. ($\star$) Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On note $D = \{x \in \Omega : \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a.p.d.

1. si μ est finie,
2. si μ est σ-finie,
3. si μ est quelconque ?

Exercice 12. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $\{x\} \in \mathcal{T}$ pour tous $x \in \Omega$. On dit que μ est *continue* si $\mu(\{x\}) = 0$, pour tout $x \in \Omega$ et on dit que μ est *discrète* s'il existe un ensemble D a.p.d. tel que $\mu(D^c) = 0$.

1. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   (a) μ est continue ;
   (b) si A est une partie a.p.d. de Ω alors $\mu(A) = 0$;
   (c) toute partie a.p.d. A de Ω est μ-négligeable.
2. Montrer que μ est discrète si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de Ω et une suite $(c_n) \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum_n c_n \delta_{a_n}$.
3. Décrire les espaces mesurés avec μ à la fois discrète et continue.
4. ($\star$) Supposons maintenant que μ est σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 13. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ une fonction mesurable. Rappelons que si μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ alors $\mu_f(A) \stackrel{def}{=} \mu(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ appelée *la mesure image de μ par f.*

1. Soit $\{a\} \in \mathcal{T}$. Déterminer μ_f si $\mu = \delta_a$.
2. On suppose que $\mu(\Omega) = 1$. Soit $n = 1$ et $B \in \mathcal{T}$. Déterminer μ_{1_B}.
3. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$ et que $f(\Omega)$ est fini. Déterminer μ_f.

Exercice 14. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice 15. $(\star)$ Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) > 0$ alors il existe un ouvert non-vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$. Et réciproquement ?
2. Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $\lambda(A) < \infty$ alors A est bornée.

Exercice 16. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
2. Une union a.p.d. d'ensembles négligeables est négligeable.
3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice 17. $(\star)$ Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et

$$\overline{\mathcal{T}} = \{A \Delta N : A \in \mathcal{T}, N \ \mu - \text{négligeable}\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{T}}$ est une tribu. *C'est la tribu μ-complétée de $\mathcal{T}$.* (Indication : Pour montrer la stabilité par union, on pourra d'abord montrer que $B \in \overline{\mathcal{T}}$ si et seulement si il existe $A_1 \subset B \subset A_2$ avec $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ et $\mu(A_2 \setminus A_1) = 0$).
2. Soit $\overline{\mu} : \overline{\mathcal{T}} \to \overline{\mathbb{R}}, A \Delta N \mapsto \mu(A)$, où $A \in \mathcal{T}$ et N est μ-négligeable. Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\overline{\mathcal{T}}$. On obtient un espace mesuré $(\Omega, \overline{\mathcal{T}}, \overline{\mu})$ appelé *l'espace mesuré μ-completé de* $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$.

Exercice 18. $(\star)$ Soit $\Sigma = \{x = (x_n) : n \in \mathbb{N}, x_n \in \{0, 1\}\}$. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \{0, 1\}$ on pose $A_{n,\varepsilon} = \{x \in \Sigma : x_n = \varepsilon\}$. On désigne par $\mathcal{C}$ le clan sur Σ engendré par les parties $A_{n,\varepsilon}$.

1. Montrer que chaque élément de $\mathcal{C}$ est union finie de parties $\bigcap_{i=1}^{k} A_{n_i,\varepsilon_i}$ où $n_1 < \cdots < n_k$ et $k \in \mathbb{N}^*$.

   Désormais $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{C})$.
2. On définit une distance sur Σ par

$$d((x_n), (x_n)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\delta(x_n, y_n)}{2^n},$$

   où $\delta(x_n, y_n) = 0$ si $x_n = y_n$ et $\delta(x_n, y_n) = 1$ si $x_n \neq y_n$. On munit Σ de la topologie induite par d. Montrer que $\mathcal{T}$ coïncide avec la tribu des boréliens de cette topologie.

3. Avec $\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_{n_i,\varepsilon_i}$ comme ci-dessus, on pose $\mu(\bigcap\limits_{i=1}^{k} A_{n_i,\varepsilon_i}) = \frac{1}{2^k}$. Prolonger μ à une fonction additive sur $\mathcal{C}$ telle que $\mu(\Sigma) = 1$. Puis, prolonger μ à une mesure de probabilité sur l'espace mesurable $(\Sigma, \mathcal{T})$. (Indication : voir Théorème 5.56 du CM.)
4. Définissons *le décalage de Bernoulli (unilatéral)* $\beta : \Sigma \to \Sigma, (x_n) \mapsto (y_n)$, où $y_n = x_{n+1}$. Montrer que β est continue pour la topologie sur Σ induite par d.
5. Montrer que
   (a) β est mesurable, et
   (b) β preserve μ, i.e. $\mu(A) = \mu(\beta^{-1}(A))$ pour tout $A \in \mathcal{T}$. (Indication : voir l'unicité dans la formulation du Théorème 5.56.)

Remarque. La donnée de $(\Omega, \mathcal{T}, \mu, \phi)$ où $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est un espace mesuré avec $\mu(\Omega) = 1$ et $\phi : \Omega \to \Omega$ est une application mesurable qui préserve μ s'appelle *système dynamique mesuré*. Donc, cet exercice procure un exemple d'un tel système.