Feuille d'exercices IV.

Correction partielle.

Exercice 1. (Mesure de Dirac) Soit $x \in \Omega$. Montrons que δ_x est une mesure de probabilité sur Ω. On a en effet :

- Pour tout $A \subset \Omega$, $\delta_x(A) \geq 0$;
- $\delta_x(\emptyset) = 0$ car $x \notin \emptyset$;
- Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ une suite d.d.d., alors

$$\delta_x\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \bigsqcup_n A_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\bigsqcup_n A_n$ est l'union disjointe des A_n, on sait que

$$x \in \bigsqcup_n A_n \iff \exists! k \in \mathbb{N}, x \in A_k.$$

Comme de plus $\forall n \neq k$, $\delta_x(A_n) = 0$, on a bien

$$\delta_x\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \delta_x(A_k) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta_x(A_n)$$

et δ_x est bien σ-additive.

Exercice 2. (Mesure de comptage) Montrons que la mesure de comptable ν est une mesure sur $(\mathcal{P}(\Omega), \mathcal{P}(\Omega))$. On a en effet :

- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\nu(A) \geq 0$;
- $\nu(\emptyset) = Card(\emptyset) = 0$;
- Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{P}(\Omega)$ une suite d.d.d., alors on a deux cas.
  - Si l'un des A_n n'est pas fini, alors

$$\nu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = +\infty = \sum_n \nu(A_n).$$

  - Si tous les A_n sont finis, alors

$$\nu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = Card\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \sum_n Card(A_n) = \sum_n \nu(A_n),$$

et ν est donc σ-additive.

Exercice 3. (Mesure sur la tribu induite) Soit $A \in \mathcal{T}$. Montrons que $(\Omega, \mathcal{T}, \mu_A)$ est un espace mesuré. Comme $\mathcal{T}$ est une tribu, $(\Omega, \mathcal{T})$ est un espace mesurable et il suffit de montrer que μ_A est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. C'est le cas car, en effet :

- Pour tout $B \in \mathcal{T}$, $\mu_A(B) = \mu(A \cap B) \geq 0$ car μ est une mesure sur $\mathcal{T}$;
- On a $\mu_A(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap B) = \mu(\emptyset) = 0$ car μ est une mesure sur $\mathcal{T}$;
- Soit $(B_n)_n \subset \mathcal{T}$ une suite d.d.d., alors

$$\mu_A\left(\bigsqcup_n B_n\right) = \mu\left(A \cap \bigsqcup_n B_n\right) = \mu\left(\bigcup_n (A \cap B_n)\right) = \sum_n \mu\left(A \cap B_n\right) = \sum_n \mu_A(B_n),$$

car la suite $(A \cap B_n)_n \subset \mathcal{T}$ est aussi d.d.d. puisque $(B_n)_n$ l'est, et μ est σ-additive.

Montrons maintenant que $(A, \mathcal{T}_A, \mu_A)$ est un espace mesuré. Il suffit de montrer que $\mathcal{T}_A$ est une tribu car on sait déjà que μ_A est une mesure sur $\mathcal{T}$ et donc aussi sur $\mathcal{T}_A$. Il s'agit bien d'une tribu car :

- $A = \Omega \cap A \in \mathcal{T}_A$;
- Soit $B \cap A \in \mathcal{T}_A$ où $B \in \mathcal{T}$, alors $A \backslash (B \cap A) = B^c \cap A \in \mathcal{T}_A$ car $B^c \in \mathcal{T}$ puisque $\mathcal{T}$ est une tribu ;
- Soit $(B_n \cap A)_n \subset \mathcal{T}_A$ une suite où $B_n \in \mathcal{T}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, comme $\bigcup_n B_n \in \mathcal{T}$, on a

$$\bigcup_n (B_n \cap A) = A \cap \bigcup_n B_n \in \mathcal{T}_A.$$

Exercice 4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Montrons que $\lambda\mu$ définit une mesure sur $(\Omega, \mathcal{T})$. On a en effet :

- Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\lambda\mu(A) \geq 0$ car $\lambda \geq 0$ et μ est une mesure ;
- On a $\lambda\mu(\emptyset) = \lambda \times 0 = 0$ car μ est une mesure ;
- Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{T}$ une suite d.d.d., alors

$$\lambda\mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \lambda \times \mu\left(\bigsqcup_n A_n\right) = \lambda \sum_n \mu(A_n) = \sum_n \lambda\mu(A_n),$$

car μ est σ-additive.

Ainsi, soit $A \in \mathcal{T}$ tel que $0 < \mu(A) < \infty$, alors on peut choisir $\lambda = \frac{1}{\mu(A)} > 0$ et $\mu_A(\cdot)/\mu(A)$ est une mesure sur $(A, \mathcal{T}_A)$. De plus, on a $\mu_A(A)/\mu(A) = 1$ et il s'agit bien d'une mesure de probabilité sur $(A, \mathcal{T}_A)$.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

1. Si $A \in \mathcal{T}$ alors $\mu(\Omega) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
   VRAI. En effet, $A \cap A^c = \emptyset$ et $A \cup A^c = \Omega$, donc par σ-additivité on a bien $\mu(\Omega) = \mu(A \cup A^c) = \mu(A) + \mu(A^c)$.
2. Si $A, B \in \mathcal{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ alors A et B sont disjoints.
   FAUX. Il est tout à fait possible que $\mu(A \cap B) = 0$ sans que $A \cap B = \emptyset$. Par exemple, si $\mu = \lambda$ est la mesure de Lebesgue, $A = [1, 2]$ et $B = [2, 3]$, alors $\mu(A \cap B) = \mu([1, 3]) = 2 = 1 + 1 = \mu(A) + \mu(B)$ mais $A \cap B = \{2\} \neq \emptyset$.
3. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 2\}$.
   VRAI. On choisit $\Omega = \{x_1, x_2\}$, où $x_1 \neq x_2$, et $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, \Omega\}$. On définit une fonction $\mu : \mathcal{T} \to \mathbb{R}_+$ par $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(\{x_1\}) = \mu(\{x_2\}) = 1$ et $\mu(\Omega) = 2$. Ainsi μ est bien une mesure sur $\mathcal{T}$ car :
   - Pour tout $A \in \mathcal{T}$, $\mu(A) \geq 0$;

- On a bien $\mu(\emptyset) = 0$;
- La seule union disjointe possible avec des éléments non-vides est $A_1 \cup A_2$ avec $A_1 = \{x_1\}$ et $A_2 = \{x_2\}$ et on a

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(\Omega) = 2 = 1 + 1 = \mu(A_1) + \mu(A_2),$$

donc μ est bien σ-additive.

4. Il existe un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) : A \in \mathcal{T}\} = \{0, 1, 3\}$.
FAUX. Si tel était le cas, alors on aurait nécessairement $\mu(\Omega) = 3$ et si $\mu(A) = 1$ alors $\mu(A^c) = 3 - \mu(A) = 3 - 1 = 2$. Or $A^c \in \mathcal{T}$ car $A \in \mathcal{T}$ mais il n'y a pourtant aucun élément de la tribu de mesure 2, ce qui est impossible.
5. Soient $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathcal{E})$ et μ_1 et μ_2 des mesures sur $\mathcal{T}$ telles que $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tous $A \in \mathcal{E}$. Est-ce que $\mu_1 = \mu_2$?
FAUX. Il faut que les mesures soient finies. Par exemple si μ_1 est la longueur d'un intervalle et $\mu_2 = 2\mu_1$, alors μ_1 et μ_2 coïncident sur les ensembles de type $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ donné (leurs mesures sont infinies) mais on a pas $\mu_1 = \mu_2$ sur $\mathcal{T}\left(\{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}\right) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesurable. On suppose $\mu(\Omega) < \infty$. Montrons que

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{T} : \mu(A) = \mu(\Omega) \text{ ou } \mu(A) = 0\} \text{ est une tribu.}$$

C'est en effet le cas car :

- $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$;
- $\Omega \in \mathcal{A}$ de manière évidente ;
- Soit $A \in \mathcal{A}$, alors :
  - Si $\mu(A) = \mu(\Omega)$, on a $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A) = 0$, donc $A^c \in \mathcal{A}$.
  - Si $\mu(A) = 0$, alors $\mu(A^c) = \mu(\Omega) - \mu(A) = \mu(\Omega)$, donc $A^c \in \mathcal{A}$.
- Soit $(A_n)_n \subset \mathcal{A}$, alors :
  - Si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A_k) = \mu(\Omega)$, alors $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \geq \mu(A_k) = \mu(\Omega)$. De plus, comme $\mu(\Omega) \geq \mu\left(\bigcup_n A_n\right)$ car $\bigcup_n A_n \subset \Omega$, on en déduit que $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = \mu(\Omega)$ et donc que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.
  - Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) = 0$, alors par sous-additivité de μ, on a $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$. Comme $\mu(A) \geq 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$, on en déduit que $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 0$, et donc que $\bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Exercice 7. Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré, $A, B \in \mathcal{T}$ et $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une suite finie d'éléments dans $\mathcal{T}$.
1. Montrons que si $\mu(A) < \infty$ alors $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \Delta B)$. On rappelle que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Supposons, sans perdre de généralité (quitte à inverser A et B car $A \Delta B = B \Delta A$), que $\mu(B) < \mu(A)$. On a donc

$$\begin{aligned}
\mu(A \Delta B) - \mu(A) + \mu(B) &= \mu(A \cap B^c) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) + \mu(B) \\
&\geq \mu((A \cap B^c) \cup B) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) \\
&= \mu(A) + \mu(B \cap A^c) - \mu(A) \\
&= \mu(B \cap A^c) \geq 0.
\end{aligned}$$

Cela revient à dire que $|\mu(A) - \mu(B)| = \mu(A) - \mu(B) \leq \mu(A\Delta B)$.
2. Montrons que si $\mu(A)+\mu(B) > \mu(\Omega)$ alors $A\cap B \neq \emptyset$ et $\mu(A\cap B) > 0$. On raisonne par contraposée et suppose que $A\cap B = \emptyset$ ou $\mu(A\cap B) = 0$. Montrons que $\mu(A)+\mu(B) \leq \mu(\Omega)$. On a en effet :

- Si $A \cap B = \emptyset$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \leq \mu(\Omega)$ car $A \cup B \subset \Omega$.
- Si $\mu(A \cap B) = 0$, alors, comme $A\Delta B \subset \Omega$,

$$\mu(A) + \mu(B) \leq \mu(A \cup B) = \mu(A\Delta B) + \mu(A \cap B) = \mu(A\Delta B) \leq \mu(\Omega).$$

3. Montrons que si $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ alors il existe un indice j tel que $\mu(A_j) \geq \frac{\mu(\Omega)}{n}$. Raisonnons par l'absurde et supposons que pour tout $j \in \{1, ..., n\}$, $\mu(A_j) < \frac{\mu(\Omega)}{n}$, on a alors

$$\mu(\Omega) = \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) < \sum_{j=1}^{n} \frac{\mu(\Omega)}{n} = \mu(\Omega),$$

ce qui est impossible. Ainsi, il existe $j \in \{1, ..., n\}$ tel que $\mu(A_j) \leq \frac{\mu(\Omega)}{n}$.

Exercice 8. **($\star$)** Supposons que la mesure μ de l'espace mesuré $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ est σ-finie. Montrons qu'il existe une suite $(A_n) \subset \mathcal{T}$ d.d.d. telle que $\mu(A_n) < \infty$ et $\Omega = \underset{n}{\cup} A_n$.
En effet, si μ est σ-finie, il existe une famille dénombrable $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}$ telle que $\Omega = \bigcup_n B_n$ et $\mu(B_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut construire une famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en définissant

$$A_0 = B_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = A'_n \backslash A'_{n-1} \quad \text{où } A'_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} B_k.$$

On a ainsi :

- $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \mathcal{T}$ car $\mathcal{T}$ est une tribu, donc stable par union et passage au complémentaire ;
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mu(A_n) \leq \mu(A'_n) < \sum_{k=0}^{n} \mu(B_n) < \infty$;
- $\bigcup_n A_n = \bigcup_n B_n = \Omega$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A'_n \subset A'_{n+1}$;
- Pour tout $i < j$ où $i, j \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} A_i \cap A_j &= (A'_i\backslash A'_{i-1}) \cap (A'_j\backslash A'_{j-1}) \\ &= \bigcup_{0\leq k\leq i} B_k \cap \left(\bigcup_{0\leq k\leq i-1} B_k\right)^c \cap \bigcup_{0\leq k\leq j} B_k \cap \left(\bigcup_{0\leq k\leq j-1} B_k\right)^c \\ &= \left(\bigcup_{0\leq k\leq i} B_k\right) \cap \left(\bigcap_{0\leq k\leq i-1} B_k^c\right) \cap \left(\bigcup_{0\leq k\leq j} B_k\right) \cap \left(\bigcap_{0\leq k\leq j-1} B_k^c\right) \\ &= \left(\bigcup_{0\leq k\leq i} B_k\right) \cap \left(\bigcap_{0\leq k\leq j-1} B_k^c\right) = \emptyset. \end{aligned}$$

  Le même argument montre que $A_0 \cap A_j = \emptyset$ pour tout $j > 0$.

Exercice 9. **($\star$)** Montrons que la mesure de Lebesgue λ_n sur $\mathbb{R}^n$ est invariante par translation, i.e., $\lambda_n(A) = \lambda_n(\overrightarrow{a} + A)$ pour tout $\overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Il suffit de le montrer pour les pavés connexes fermés $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]$ qui génèrent les boréliens de $\mathbb{R}^d$. En effet, en notant $\overrightarrow{a} = (x_1, ..., x_n)$, on a

$$\begin{aligned}
&\lambda_n(\overrightarrow{a} + [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]) \\
&= \lambda_n\left([a_1 + 1, b_1 + x_1] \times [a_2 + x_2, b_2 + x_2] \times ... \times [a_n + x_n, b_n + x_n]\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(b_i + x_i - (a_i + x_i)) \\
&= \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \\
&= \lambda_n([a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_n, b_n]).
\end{aligned}$$

Exercice 10. (théorème du récurrence de Poincaré)($\star$) On suppose $\mu(\Omega) < \infty$. Soit f une application mesurable $f : \Omega \to \Omega$ qui *préserve la mesure* μ, c'est-à-dire que $\mu(X) = \mu(f^{-1}(X)), \forall X \in \mathcal{T}$. On pose $f^1 \stackrel{def}{=} f$ et $f^{n+1} \stackrel{def}{=} f^n \circ f, \forall n \geq 1$.

1. Montrons que f^n préserve μ pour tout $n \geq 1$.
   On raisonne par récurrence sur $n \geq 1$. L'initialisation est immédiate car, pour $n = 1$, $f = f^1$ et f préserve la mesure.
   Pour démontrer l'hérédité, supposons que la propriété est vraie pour $n \geq 1$ et montrons-la pour $n + 1$. On a, pour tout $X \in \mathcal{T}$,
   $$\mu\left((f^{n+1})^{-1}(X)\right) = \mu\left((f^n \circ f)^{-1}(X)\right) = \mu\left(f^{-1}\left((f^n)^{-1}(X)\right)\right).$$
   Comme f est mesurable, alors $(f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}$ et comme f préserve la mesure, on a donc, pour tout $X \in \mathcal{T}$,
   $$\mu\left(f^{-1}\left((f^n)^{-1}(X)\right)\right) = \mu\left((f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}\right).$$
   Par hypothèse de récurrence, f^n préserve la mesure et on obtient donc
   $$\mu\left((f^{n+1})^{-1}(X)\right) = \mu\left((f^n)^{-1}(X) \in \mathcal{T}\right) = \mu(X),$$
   ce qui montre que f^{n+1} préserve la mesure μ. Ainsi, par récurrence, on obtient que pour tout $n \geq 1$, f^n préserve la mesure μ.
2. On fixe un $A \in \mathcal{T}$ et on désigne $F \stackrel{def}{=} \{x \in A : f^n(x) \notin A, \forall n \geq 1\}$. (*$F$ est l'ensemble des points de A qui ne retournent pas à A sous l'action de f.*) Montrons que $(f^n)^{-1}(F) \cap F = \emptyset, \forall n \geq 1$.
   Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x \in (f^n)^{-1}(F) \cap F$, alors :
   - Comme $x \in F$, on a : $x \in A$ et $\forall n \geq 1$, $f^n(x) \notin A$;
   - Comme $x \in (f^n)^{-1}(F)$, alors $f^n(x) \in F$ donc $f^n(x) \in A$.

   Il y a donc une contradiction, ce qui veut dire que $(f^n)^{-1}(F) \cap F = \emptyset, \forall n \geq 1$.
3. Montrer que $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$ si $m \neq n$.
   Encore une fois, on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $x \in (f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F)$. On a donc
   - $x \in (f^n)^{-1}(F) \Rightarrow f^n(x) \in F$, et donc $f^n(x) \in A$ et $f^{n+k}(x) \notin A$ pour tout $k \geq 1$;

- $x \in (f^m)^{-1}(F) \Rightarrow f^m(x) \in F$, et donc $f^m(x) \in A$ et $f^{m+k}(x) \notin A$ pour tout $k \geq 1$.

Comme on peut supposer sans perdre de généralité que $m > n$, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = k + n$ et on a à la fois $f^m(x) \in A$ (par le deuxième point) et $f^{n+k}(x) \notin A$ (par le premier point), ce qui est impossible. On a donc une contradiction et $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$ si $m \neq n$.

4. Montrons que pour μ-presque tout $x \in A$ il existe $n = n(x) \geq 1$ tel que $f^n(x) \in A$, c'est-à-dire que $\mu(F) = 0$.

   On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu(F) = \mu\left((f^n)^{-1}(F)\right)$. Or on sait que pour tout $m \neq n$, on a $(f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F) = \emptyset$, ce qui implique que

$$0 = \mu(\emptyset) = \mu\left((f^n)^{-1}(F) \cap (f^m)^{-1}(F)\right) = \mu\left((f^n)^{-1}(F)\right) + \mu\left((f^m)^{-1}(F)\right) = 2\mu(F).$$

   On a donc obtenu que $\mu(F) = 0$.

Exercice 11. (Non-corrigé)

Exercice 12. (Non-corrigé)

Exercice 13. Soit $f : (\Omega, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ une fonction mesurable. Rappelons que si μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\Omega, \mathcal{T})$ alors $\mu_f(A) \overset{def}{=} \mu(f^{-1}(A)), \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, est une mesure sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ appelée *la mesure image de μ par f.*

1. Soit $\{a\} \in \mathcal{T}$. Déterminons μ_f si $\mu = \delta_a$.

   On a, par définition, $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mu_f(A) = \delta_a(f^{-1}(A))$ qui vaut 0 si $a \notin f^{-1}(A)$ et 1 sinon, c'est-à-dire que $\mu_f(A) = 0$ si $f(a) \notin A$ et $\mu_f(A) = 1$ si $f(a) \in A$. On a donc $\mu_f = \delta_{f(a)}$.

2. On suppose que $\mu(\Omega) = 1$. Soit $n = 1$ et $B \in \mathcal{T}$. Déterminons μ_{1_B}.

   Par définition, on a : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ $\mu_{1_B}(A) = \mu\left(1_B^{-1}(A)\right)$. On a donc, pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$:
   - $\mu_{1_B}(A) = \mu(\emptyset) = 0$ si $A \cap \{0,1\} = \emptyset$;
   - $\mu_{1_B}(A) = \mu(B^c) = 1 - \mu(A)$ si $A \cap \{0,1\} = \{0\}$;
   - $\mu_{1_B}(A) = \mu(B)$ si $A \cap \{0,1\} = \{1\}$;
   - $\mu_{1_B}(A) = \mu(\Omega) = 1$ si $\{0,1\} \subset A$.

   On a donc $\mu_{1_B} = \mu(B)\delta_1 + (1 - \mu(B))\delta_0$.

3. On suppose que $\mu(\Omega) < +\infty$ et que $f(\Omega)$ est fini. Déterminons μ_f.

   Encore une fois, par définition : $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\mu_f(A) = \mu(f^{-1}(A))$. On a donc
   - $f(\Omega)$ fini $\Rightarrow f$ est une fonction étagée, c'est-à-dire qu'il existe une partition finie $(A_k)_{0 \leq k \leq n} \subset \Omega$ et des réels $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que $\forall x \in \Omega$, $f(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k 1_{A_k}(x)$.
   - $\mu_f(\mathbb{R}^d) = \mu(f^{-1}(\mathbb{R}^d)) = \mu(\Omega) < \infty$, et donc la mesure μ_f est finie.

   On en déduit que $\mu_f = \sum_{k=0}^n \mu(A_k)\delta_{\alpha_k}$.

Exercice 14. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$. Si $U = \emptyset$, il est évident que $\lambda(U) = 0$. Montrons la réciproque par contraposée en supposant que $U \neq \emptyset$ est un ouvert. Alors U contient un intervalle $]x - r, x + r[$ centrée en $x \in U$ et de longueur $2r > 0$. Ainsi $\lambda(U) \geq \lambda(]x - r, x + r[) = 2r > 0$. On a donc montré que $\lambda(U) = 0 \Rightarrow U = \emptyset$.

Exercice 15. (Non-corrigé)

Exercice 16. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.
   VRAI. En effet, soit A négligeable (c'est-à-dire $\mu(A) = 0$) et $B \subset A$, alors $0 \leq \mu(B) \leq \mu(A) = 0$ et donc $\mu(B) = 0$.
2. Une union a.p.d. d'ensembles négligeables est négligeable.
   VRAI. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une suite d'ensembles négligeables où $I \subset \mathbb{N}$. Alors on a, par sous-additivité,
   $$0 \leq \mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(A_i) = 0,$$
   et donc $\mu\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 0$.
3. Une union d'ensembles négligeables est négligeable.
   FAUX. On sait que $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ est négligeable pour la mesure de Lebesgue, mais $\bigcup_{x \in [0,1]} \{x\} = [0, 1]$ n'est pas négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Exercice 17. (Non-corrigé)

Exercice 18. (Non-corrigé)