Feuille d'exercices V.

Intégrales à paramètres

Exercice 1. Pour $t \geq 0$, on pose $F(t) = \left(\int_0^t \exp(-x^2)\, dx\right)^2$ et $G(t) = \int_0^1 \frac{\exp(-t^2(1+x^2))}{1+x^2}\, dx$.

1. (a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $F'(t) + G'(t)$ pour $t \geq 0$.
2. En déduire la valeur de $I = \int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx$ puis de $J = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2/2)\, dx$.

Exercice 2.

1. Soit $I(t) = \int_0^{+\infty} \cos(2xt) e^{-x^2}\, dx$, pour $t \in \mathbb{R}$. Prouver que I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une relation simple entre I et I'.
3. En déduire la valeur de $I(t)$ pour tout réel t $\left(\text{on admet que } I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$.

Exercice 3. Pour $t \geq 0$, on pose $\varphi(t) = \int_0^1 e^{-t/x}\, dx$.

Montrer que φ est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\varphi''(t) = \frac{e^{-t}}{t}$ pour $t > 0$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\, dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Calculer f'' et les limites en $+\infty$ de f et f'.
3. En déduire une expression simple de f.
4. Donner la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx$ (pour la deuxième intégrale, on pourra penser à utiliser la relation $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ et une intégration par parties).

Exercice 5.

1. On fixe un réel t. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln(x)}\,dx$ converge si et seulement si $t > 2$. Dans la suite de l'exercice, on pose $F(t) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^t \ln(x)}\,dx$.
2. Montrer que F est de classe C^1 sur $]2, +\infty[$ et donner une formule pour la dérivée de F qui ne fasse pas intervenir d'intégrale.
3. Déterminer la limite de $F(t)$ quand t tend vers $+\infty$.
4. Donner une formule exprimant la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 2$ et ne faisant pas intervenir d'intégrale.

Exercice 6. On pose $I(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,dx$ pour $\alpha \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq I(\alpha) < +\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$.
2. Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer $I'(\alpha)$, pour $\alpha > 0$, sous la forme d'une intégrale.
3. Montrer que I est continue en 0.
4. (a) Soit $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Décomposer la fraction rationnelle $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples.
   (b) En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.
   (c) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice 7. On pose pour $t \geq 0$: $f(t) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t^2+x^2)}{1+x^2}\,dx$. Montrer que la fonction f est bien définie et dérivable sur $[0, +\infty[$.
Calculer explicitement f' et en déduire f (on calculera $f(0)$ à l'aide du changement de variable $u = 1/x$).

Exercice 8. Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $F(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(xt)}{1+x^2}\,dx$ et $G(t) = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(xt)}{x^2(1+x^2)}\,dx$.

1. Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.
2. Etablir l'égalité valable pour tout réel t :

$$F(0) - F(t) + G(t) = C|t|, \text{ où } C = \int_0^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

3a. Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et vérifie $G''(t) = F(t)$ pour tout réel t.
3b. En utilisant la question 2, en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie une équation différentielle du second ordre.
3c. En déduire l'expression de $F(t)$ pour $t > 0$ (on pourra remarquer qur la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(t)$ pour tout réel t.
4. Déduire de tout cela la valeur de la constante C.