Feuille d'exercices V.

Correction partielle.

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Écrire de manière plus simple la quantité $\int f\, d\mu$ lorsque :

1. μ est une mesure de Dirac ;
2. μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Correction 1. On suppose que $f \colon \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable (car sinon l'exo n'a pas de sens). Rappelons nous que $\int f\, d\mu$ est définie comme

$$\int f\, d\mu \quad := \quad \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\ ,$$

où $f^+(x) := \max\{0, f(x)\}$ est la partie positive de f et $f^-(x) := \max\{0, -f(x)\}$ est la partie négative de f t.q. $f = f^+ - f^-$.
Pour une fonction mesurable *positive* $g \colon \Omega \to [0, \infty)$ on sait qu'il existe une suite *croissante* de fonctions étagées $g_n \colon \Omega \to [0, \infty)$ qui convergent ponctuellement vers g, et que nous avons

$$\int g\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu\ .$$

On va utiliser cet outil pour trouver les réponses à (a) et (b).

(a) Rappelons nous que la mesure de Dirac μ pour $a \in \Omega$ est définie par

$$\mu(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

pour tout $A \in \mathcal{T}$.
Supposons que g est une fonction étagée de la forme

$$g = \sum_{j=1}^{N} c_j\, \mathbf{1}_{A_j}$$

avec $c_1, \dots, c_N \in [0, \infty)$ et $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{T}$ deux-à-deux disjointes. Alors, le point a n'appartient qu'à un seul des A_j ou à aucun. On obtient alors

$$\int g\, d\mu := \sum_{j=1}^{N} c_j\, \mu(A_j) = \begin{cases} c_j & \text{si } a \in A_j \\ 0 & \text{si } a \text{ n'appartient à aucun } A_j \end{cases}$$

Dans les deux cas, on vérifie facilement que $\int g\, d\mu = g(a)$.

Suppose maintenant que $f\colon \Omega \to [0,\infty)$ est mesurable et *positive*. Il existe une suite croissante de fonctions étagées g_k convergeant ponctuellement vers f et nous avons

$$\int f\,d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\,d\mu = \lim_{k\to\infty} g_k(a) = f(a)\ .$$

Si f n'est pas positive, nous pouvons appliqué l'argument ci-dessus à f^+ et à f^- séparément, alors

$$\int f\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu = f^+(a) - f^-(a) = f(a)\ .$$

Solution alternative : Pose $y = f(a)$, alors $A = f^{-1}(\{y\})$ est un mesurable car $\{y\}$ est un borélien. Si f est μ-intégrable, alors nous pouvons décomposer

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_{A^c} f\,d\mu\ .$$

Sur A, f est constant à y, nous pouvons donc remplacer le premier terme par $\int_A f\,d\mu = y\int_\Omega \mathbf{1}_A\,d\mu = y\,\mu(A) = y$ car $a \in A$.
Pour le deuxième terme, rappelons nous que $\mu(A^c) = 0$ car $a \notin A^c$. Alors comme f est intégrable, on peut supposer que f^+ et f^- le sont aussi. Avec l'estimation $f^+\cdot\mathbf{1}_{A^c} \le \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}$ et le résultat expliqué en exo 2.4 ci-dessous, nous obtenons

$$\int_{A^c} f^+\,d\mu \le \int \infty\cdot\mathbf{1}_{A^c}\,d\mu = 0$$

et pareil pour f^-. On obtient donc

$$\int_\Omega f\,d\mu = f(a)\ .$$

(b) La mesure du comptage sur $\mathbb{N}$ est définie par

$$\mu(A) = \mathrm{Card}(A)$$

pour tout $A \subset \mathbb{N}$.
Si g est une fonction étagée positive

$$g = \sum_{j=1}^N c_j\,\mathbf{1}_{A_j}$$

avec $c_1,\dots,c_N \in [0,\infty)$ et $A_1,\dots,A_N \subset \mathbb{N}$ deux-à-deux disjointes, alors

$$\int g\,d\mu = \sum_{j=1}^N c_j\,\mu(A_j) = \sum_{j=1}^N c_j\cdot\mathrm{Card}(A_j)\ .$$

On vérifie facilement que $c_j\cdot\mathrm{Card}(A_j) = \sum_{x\in A_j} g(x)$ et donc

$$\int g\,d\mu = \sum_{n=0}^\infty g(n)\ .$$

Si $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ est une fonction mesurable positive (ici toute fonction est mesurable car $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$), alors il on définie une suite croissante de fonctions g_k par

$$g_k\colon \mathbb{N} \to [0,\infty),\ n \mapsto \begin{cases} f(n) & \text{si } n \leq k \\ 0 & \text{si } n > k. \end{cases}$$

Ces fonctions sont étagées (en fait, nous pouvons écrire $g_k = \sum_{j=1}^{k} f(j) \cdot \mathbf{1}_{\{j\}}$) et elles convergents ponctuellement vers f. Or par le théorème de convergence monotone

$$\int f\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} g_k(n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ .$$

Si f n'est pas positive, nous utilisons à nouveau la décomposition $f = f^+ - f^-$ et on trouve

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \int_{\mathbb{N}} f^+\, d\mu - \int_{\mathbb{N}} f^-\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f^+(n) - \sum_{n=0}^{\infty} f^-(n)\ .$$

Si $\sum_n f(n)$ est *absolument* convergente, on peut réécrire

$$\int_{\mathbb{N}} f\, d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\ ,$$

sinon f n'est pas μ-intégrable.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = \mu(A)$;
2. si $f = a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_B$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = a\,\mu(A) + b\,\mu(B)$;
3. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ alors f est intégrable ;
4. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est intégrable alors $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$;
5. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et vérifie $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$;
6. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et satisfait $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p. ;
7. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p.p. alors $\int f d\mu = 0$;
8. si $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ est mesurable et $\int_{\Omega} f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ μ-p.p.
9. le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Correction 2.

1. Vrai, car f est une fonction étagée : $f = 1 \cdot \mathbf{1}_A$ avec A mesurable. Alors par définition $\int f\, d\mu = 1 \cdot \mu(A)$.
2. Vraie. L'écriture de f ne correspond pas à celle d'une fonction étagée dans le sens strict car A et B peuvent ne pas être disjoints. Par contre, nous pouvons réécrire $\mathbf{1}_A$ comme $\mathbf{1}_{A\setminus B} + \mathbf{1}_{A\cap B}$ et puis

$$f = a\,\mathbf{1}_A + b\,\mathbf{1}_B = a\mathbf{1}_{A\setminus B} + a\,\mathbf{1}_{A\cap B} + b\,\mathbf{1}_{B\setminus A} + b\,\mathbf{1}_{A\cap B} = a\mathbf{1}_{A\setminus B} + (a+b)\,\mathbf{1}_{A\cap B} + b\,\mathbf{1}_{B\setminus A}$$

ce qui montre que f est bien une fonction étagée (en particulier $A\backslash B, B\backslash A, A\cap B \in \mathcal{T}$). Si $a, b > 0$ on trouve avec la définition de l'intégrale pour des fonctions étagées positives

$$\begin{aligned}\int f\, d\mu &= a\, \mu(A \setminus B) + (a+b)\, \mu(A \cap B) + b\, \mu(B \setminus A) \\ &= a\,\big(\mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B)\big) + b\,\big(\mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B)\big) = a\, \mu(A) + b\, \mu(B)\ .\end{aligned}$$

Si $a > 0$ et $b < 0$, on obtient

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu = \int a\, \mathbf{1}_A\, d\mu - \int (-b)\, \mathbf{1}_B\, d\mu = a\, \mu(A) + b\, \mu(B)\ .$$

Attention dans ce cas, si $\mu(A) = \mu(B) = \infty$, la somme (et l'intégrale) n'est pas définie.

Pareil pour les autres combinaisons de signes.

3. Faux, car $f = \mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable sur $\big(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})\big)$ qui n'atteint pas ∞, par contre $\int f\, d\mu = \lambda(\mathbb{R}) = \infty$.
4. Vrai. Si f, g sont deux fonctions positives mesurables et si $g \leq f$, alors $\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu$. Soit $A := f^{-1}(\{\infty\})$. Cet ensemble est mesurable car $\{\infty\}$ est un fermé de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Pose $g = \infty \cdot \mathbf{1}_A$, alors $g \leq f$ et donc $\int g\, d\mu \leq \int f\, d\mu < \infty$.
   Pour calculer $\int g\, d\mu$, nous ne pouvons pas utiliser la définition de l'intégrale des fonctions étagées car g n'est pas à valeurs réelles. Par contre, soit $g_k = k \cdot \mathbf{1}_A$, alors g_k est une suite croissante de fonctions qui convergent vers $g_k \to g$. Avec le théorème de la convergence monotone, on obtient

$$\int g\, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int g_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty} k \cdot \mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(A) = 0 \\ \infty & \text{si } \mu(A) > 0. \end{cases}$$

   Alors si $\int g\, d\mu < \infty$, forcement $\mu(A) = 0$.
5. Faux. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\{x\}$ est un borélien sur $\mathbb{R}$, et alors $f = \mathbf{1}_{\{x\}}$ est une fonction étagée positive, par contre $\int f\, d\mu = 1 \cdot \mu(\{x\}) = 0$.
6. Vrai. On pose $A_n = f^{-1}\big([1/n, \infty[\big)$, alors A_n est mesurable. De plus, $g_n := \frac{1}{n} \cdot \mathbf{1}_{A_n}$ est une fonction étagée avec $g_n \leq f$. On obtient avec l'estimation

$$\frac{1}{n} \cdot \mu(A_n) = \int g_n\, d\mu \leq \int f\, d\mu = 0$$

   donc, que nécessairement $\mu(A_n)$ est égale à 0. Considère maintenant $A_\infty := \cup_n A_n$. Clairement A_∞ est l'ensemble où $f \neq 0$, mais

$$0 \leq \mu(A_\infty) = \mu\big(\cup_n A_n\big) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=0}^{\infty} 0 = 0\ .$$

   On a montré que f s'annule μ-p.p.

7. Vrai. Si $f = 0$ μ-p.p., alors $A = f^{-1}\big(]0,\infty]\big)$ est mesurable et $\mu(A) = 0$. Soit g la fonction $\infty \cdot \mathbf{1}_A$, alors $f \leq g$ et nous avons montré en partie 2.4 que $\int g\,d\mu = 0$. Donc
$$0 \leq \int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu = 0\ .$$
8. Vrai. Conséquence directe de partie 4. Car si f est mesurable et son intégrale est finie, alors f est intégrable. Selon partie 4, $\mu\big(f^{-1}(\{\infty\})\big) = 0$ veut dire que l'ensemble où $f = \infty$ est négligeable et ceci implique que $f < \infty$ μ-presque partout.
9. Faux. Le produit de deux fonctions *mesurables* est mesurable, mais le produit de deux fonctions intégrables peut ne pas être intégrable, par exemple : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1]}$ est intégrable, mais $f \cdot f = \frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{]0,1]}$ ne l'est pas.

Exercice 3. 1. On considère la fonction $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Montrer que f est Lebesgue intégrable et calculer son intégrale.

2. Mêmes questions pour la fonction $f\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Correction 3. (a) Clairement $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ est dénombrable. Alors comme pour tout $x \in [0,1]$, le singleton $\{x\}$ est un fermé et donc aussi un borélien, et l'union dénombrable de parties mesurables est mesurable, on obtient que A est borélien et en particulier $\lambda(A) = \lambda\big(\cup_{x\in A}\{x\}\big) = \sum_{x\in A}\lambda(\{x\}) = 0$.
On peut écrire f comme $f(x) = x^2 + (x - x^2)\cdot \mathbf{1}_A$. La fonction $x \mapsto x^2$ est continue et donc borélienne. La fonction $(x-x^2)\cdot\mathbf{1}_A$ est le produit d'une fonction continue avec une fonction borélienne, donc elle aussi est borélienne.
Utilisant que l'intégrale de Lebesgue et celle de Riemann coïncident pour les fonctions Riemann intégrables, on calcule :
$$\int_{[0,1]} x^2\,d\lambda = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}\cdot x^3\big|_0^1 = \frac{1}{3}\ .$$
Pour la fonction $(x-x^2)\cdot\mathbf{1}_A$, utilise que $0 \leq x - x^2 \leq 1$ sur l'intervalle $[0,1]$, donc
$$0 \leq \int_{[0,1]} (x-x^2)\cdot\mathbf{1}_A\,d\lambda \leq \int_{[0,1]} \mathbf{1}_A\,d\lambda = \lambda(A) = 0\ .$$
On déduit que f est Lebesgue intégrable et
$$\int_{[0,1]} f\,d\lambda = \int_{[0,1]} x^2\,d\lambda + \int_{[0,1]} (x-x^2)\cdot\mathbf{1}_A\,d\lambda = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}\ .$$

(b) Soit $A = \{x \in [0,\pi/2] :\ \cos(x) \in \mathbb{Q}\}$. La fonction $\cos(x)$ est strictement monotone sur l'intervalle $[0,\pi/2]$ et par conséquence injective. Comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on obtient

que A est aussi au plus dénombrable et A est borélien comme union dénombrable de boréliens. De plus $\lambda(A) = 0$.
Pose comme dans la partie (a)

$$f(x) = \sin^2 x \;+\; \big(\sin x - \sin^2 x\big)\, \mathbf{1}_A = \sin^2 x \;+\; \sin x\, \big(1 - \sin x\big)\, \mathbf{1}_A \;.$$

Pour la première partie et avec le fait que l'intégrale de Riemann coïncide avec l'intégrale de Lebesgue sur les fonctions Riemann intégrables, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{[0,\pi/2]} \sin^2 x \, d\lambda &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = -\big(\cos x \sin x\big)\big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \big(1 - \sin^2 x\big)\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx\end{aligned}$$

donc $\int_{[0,\pi/2]} \sin^2 x \, d\lambda = \frac{\pi}{4}$.
Pour analyser l'intégrale de $\sin x\, \big(1 - \sin x\big)\, \mathbf{1}_A$, utilise que $0 \le \sin x \le 1$ sur $[0, \pi/2]$ et on obtient que $0 \le \sin x\, \big(1 - \sin x\big) \le 1$, donc $\sin x\, \big(1 - \sin x\big)\, \mathbf{1}_A \le \mathbf{1}_A$. Ça nous permet de calculer

$$0 \le \int_{[0,\pi/2]} \sin x\, \big(1 - \sin x\big)\, \mathbf{1}_A \, d\lambda \le \int_{[0,\pi/2]} \mathbf{1}_A \, d\lambda = \lambda(A) = 0 \;.$$

Conclusion, f est Lebesgue intégrable et

$$\int_{[0,\pi/2]} f \, d\lambda = \frac{\pi}{4} \;.$$

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable alors $\int f \, d\mu = \sup\{(1 - \varepsilon) \int u \, d\mu : u \text{ étagée}, \; 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\}$.

Correction 4. Par définition

$$\int f \, d\mu := \sup\Big\{ \int u \, d\mu \; : \; u \text{ étagée}, \; 0 \le u \le f \Big\} \;.$$

Le facteur $(1 - \varepsilon)$ appartient à l'intervalle $]0, 1[$, donc

$$0 \le (1 - \varepsilon) \cdot \int u \, d\mu \le \int u \, d\mu \;.$$

On obtient

$$\begin{aligned}&\sup\Big\{(1 - \varepsilon) \int u \, d\mu : u \text{ étagée}, \; 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\Big\} \\ &\qquad\qquad \le \sup\Big\{ \int u \, d\mu : u \text{ étagée}, \; 0 \le u \le f\Big\} = \int f \, d\mu \;.\end{aligned}$$

En fait, on trouve une suite de u_k étagées avec $0 \le u_k \le f$, tq

$$\lim_{k \to \infty} \int u_k \, d\mu = \int f \, d\mu \;.$$

D'un autre côté soit $\varepsilon_k > 0$ une suite avec $\varepsilon_k \to 0$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(1-\varepsilon_k)\int u_k\, d\mu \in \Big\{(1-\varepsilon)\int u\, d\mu : u \text{ étagée, } 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\Big\}$$

et

$$\lim_{k\to\infty}(1-\varepsilon_k)\int u_k\, d\mu = \lim_{k\to\infty}(1-\varepsilon_k)\ \lim_{k\to\infty}\int u_k\, d\mu = \int f\, d\mu\ .$$

Ceci montre que

$$\int f\, d\mu = \sup\Big\{(1-\varepsilon)\int u\, d\mu : u \text{ étagée, } 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\Big\}\ .$$

Exercice 5. Soient $I =]0,1[$ et $0 < \alpha < \infty$. A quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est-elle Lebesgue intégrable sur I ?

Correction 5. Les fonctions Riemann intégrables sur un intervalle compact $[a,b]$ sont aussi Lebesgue intégrable (et les deux intégrales coïncident). On obtient donc pour tout intervalle compact $[a,b] \subset]0,1[$ que

$$\int_{[a,b]} \frac{1}{x^\alpha}\, d\lambda = \int_a^b \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}\ \frac{1}{x^{\alpha-1}}\Big|_a^b = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{b^{\alpha-1}} - \frac{1}{a^{\alpha-1}}\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ (\ln x)\Big|_a^b = \ln\frac{b}{a} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

On peut définir une suite croissante de fonctions mesurables positives

$$f_k = \frac{1}{x^\alpha}\cdot \mathbf{1}_{[\frac{1}{k}, 1-\frac{1}{k}]}\ .$$

qui convergent ponctuellement vers f. Par le théorème de la convergence monotone, on déduit que f est mesurable et que

$$\int f\, d\lambda = \lim_{k\to\infty}\int f_k\, d\lambda = \begin{cases} \lim_{k\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{k})^{\alpha-1}} - k^{\alpha-1}\right) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\lim_{k\to\infty} k^{\alpha-1} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \lim_{k\to\infty}\ln\frac{k-1}{k} - \ln\frac{1}{k} = \infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \\ \infty & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Il suit que f est Lebesgue intégrable si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx\ .$$

Correction 6. La fonction $x^\alpha + \frac{e^x}{n}$ est strictement positive et continue sur $]0,1]$ et on déduit que $\left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1}$ est positive et mesurable. Il est aussi facile à voir que $x^\alpha + \frac{e^x}{n} \geq \frac{1}{n}$ sur cet intervalle donc $0 \leq \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} \leq n$. Celui montre que $\int \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx \leq n$.

On pose $f_n(x) := \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1}$. Pour appliquer le théorème de la convergence monotone, il faut montrer que la suite $f_n(x)$ est pour chaque $x \in]0,1]$ croissante en n.
Pour arriver plus rapidement au résultat, on se sert de la petite astuce de considérer $\left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1}$ pour chaque x fixé comme une fonction qui dépend de $n \in \mathbb{R}$ avec $n > 0$ (et pas seulement $n \in \mathbb{N}$). Pour montrer que cette fonction est strictement monotone, nous vérifions que sa dérivé est strictement positive

$$\frac{d}{dn}\left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} = -\left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-2} \cdot \frac{d}{dn}\frac{e^x}{n} = \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-2} \cdot \frac{e^x}{n^2} > 0 \,.$$

En particulier, la suite f_n est croissante.
La limite ponctuelle de f_n est

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

et le théorème de la convergence monotone nous donne (avec l'aide d'exo 5)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{]0,1]} f_n \, d\lambda = \int_{]0,1]} \frac{1}{x^\alpha} \, d\lambda = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases} .$$

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ. Soit

$$F(x) = \int_{]-\infty,x]} f \, d\lambda \,.$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Correction 7. Une fonction $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est par définition continue en $x_0 \in \mathbb{R}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que $|g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ satisfaisant $|x - x_0| < \delta$.
Il suffit de montrer séparément que

$$F^+(x) = \int_{]-\infty,x]} f^+ \, d\lambda \quad \text{et} \quad F^-(x) = \int_{]-\infty,x]} f^- \, d\lambda$$

sont continues, car la somme de deux fonctions continues est continue.
On fait un raisonnement par l'absurde : Suppose que F^+ n'est pas continue en x_0, alors il existe un $\varepsilon_0 > 0$ pour lequel on trouve une suite $(x_n) \subset \mathbb{R}$ avec $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ tq $|F^+(x_n) - F^+(x_0)| > \varepsilon_0$.
Définissons la suite de fonctions

$$f_n := \begin{cases} f^+ \cdot \mathbf{1}_{[x_n,x_0]} & \text{si } x_n \leq x_0 \,; \\ f^+ \cdot \mathbf{1}_{[x_0,x_n]} & \text{si } x_n > x_0 . \end{cases}$$

Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue à cette suite, car les f_n sont mesurables et satisfont $f_n = |f_n| \leq f^+$. La limite simple de la suite $(f_n)_n$ est la fonction $f_\infty = f(x_0) \cdot \mathbf{1}_{\{x_0\}}$ car pour tout $x \neq x_0$, $f_n(x) = 0$ dés que n assez grand pour que $|x - x_0| > \frac{1}{n}$; pour x_0 on vérifie que $f_n(x_0) = f^+(x_0) = f_\infty(x_0)$.
On obtient donc que

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\lambda = \int f_\infty \, d\lambda = f^+(x_0) \cdot \lambda\big(\{x_0\}\big) = 0 \; .$$

Ceci est une contradiction à l'hypothèse initiale parce que

$$\varepsilon_0 < |F^+(x_n) - F^+(x_0)| = \Big| \int_{]-\infty, x_n]} f^+ \, d\lambda - \int_{]-\infty, x_0]} f^+ \, d\lambda \Big| = \Big| \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda \Big| \to 0$$

et nous concluons que F^+ est continue en x_0.
La preuve pour F^- est complètement analogue.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

1. chaque f_n est borélienne positive ;
2. $f_n \searrow 0$;
3. $\int f_n \, d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n \, d\lambda$.

Correction 8.

1. Clairement f_n est positive et f est borélienne car elle s'écrit comme $(x - n) \cdot \mathbf{1}_{[n, \infty[}$, produit d'une fonction continue et une fonction mesurable.
2. Soit $n' > n$, alors si $x < n < n'$, certainement $f_n(x) = f_{n'}(x) = 0$; si $n \leq x < n'$, $f_n(x) = x - n \geq 0$, mais $f_{n'}(x) = 0$; et si $n < n' \leq x$, $f_n(x) = x - n > x - n' = f_{n'}(x)$. Donc f_n est bien une suite décroissante.
   La limite simple de f_n est la fonction $f_\infty = 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ dés que $n > x$, alors $f_n(x) = 0$.
3. On calcule facilement que

$$\int f_n \, d\lambda = \infty \not\to \int f_\infty \, d\lambda = 0 \; .$$

Exercice 9. ($\star$) Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f \colon \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

1. Soit $A = \{x \in \Omega : f(x) \geq 1\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f^n \, d\mu$.
2. On suppose que $\int_{A^c} f d\mu < \infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A^c} f^n \, d\mu$.

Correction 9. 1. Comme f est mesurable, et comme $[1, \infty[$ est un borélien, la partie $A = f^{-1}\big([1,\infty]\big)$ est aussi mesurable et on obtient que $f \cdot \mathbf{1}_A$ est une fonction borélienne.
Soit $A_1 = \{x \in \Omega : f(x) = 1\}$ et $A_+ = \{x \in \Omega : f(x) > 1\}$. Alors $\mathbf{1}_{A_1}$ et $\mathbf{1}_{A_+}$ sont mesurables.
Pour chaque $c \geq 1$, la suite $a_n := c^n$ est croissante, plus précisément, si $c > 1$, alors $\lim a_n = \infty$ et si $c = 1$, alors $\lim a_n = 1$.
On obtient pour $n \to \infty$ comme limite simple de $f^n \cdot \mathbf{1}_A$ la fonction

$$f_\infty = \mathbf{1}_{A_1} + \infty \cdot \mathbf{1}_{A_+} \ .$$

Par le théorème de la convergence monotone, on obtient que f_∞ est mesurable (c'était déjà clair) et

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f^n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f^n \cdot \mathbf{1}_A \, d\mu = \int_\Omega f_\infty \, d\mu = \begin{cases} \mu(A_1) & \text{si } A_+ \text{ est une partie négligeable}\,; \\ \infty & \text{si } \mu(A_+) \neq 0. \end{cases}$$

2. A^c est mesurable, nous pouvons donc définir une suite de fonctions $f_n = f^n \cdot \mathbf{1}_{A^c}$ qui sont toutes mesurables comme produits des fonctions mesurables. Les f_n sont dominées par $\mathbf{1}_{A^c}$ qui est une fonction intégrable.
La limite simple de f_n est la fonction 0, et le théorème de la convergence dominée nous donne

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A^c} f^n \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big) \, d\mu = 0 \ .$$

Exercice 11. En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n = 1_{[n,n+1[}$ montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

Correction 11. Le théorème de la convergence dominée dit

> **Théorème (de convergence dominée de Lebesgue)** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $|f_n| \leq g$ où g est intégrable et f_n converge simplement vers f. Alors f est intégrable et
>
> $$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \ .$$

Ici toutes les fonctions f_n sont mesurables (même intégrables) avec

$$\int f_n \, d\lambda = \lambda\big([n, n+1[\big) = 1 \ .$$

La limite simple de f_n est la fonction $f_\infty = 0$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $f_n(x) = 0$ dés que $n > x$, par contre on voit

$$\lim \int f_n \, d\lambda = 1 \neq 0 = \int f_\infty \, d\lambda \ .$$

Clairement, ce résultat montre que le théorème de la convergence dominée ne s'applique pas à notre cas. La raison est que la la plus petite dominante de la suite $(f_n)_n$ est $\mathbf{1}_{[0,\infty[}$ qui est mesurable, mais *pas intégrable* !

Exercice 12. Soit $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \exp(-n\sin^2 x) \cdot f(x)\, dx_;.$$

Correction 12. On applique le théorème de la convergence dominée. Il est facile à voire que

$$f_n\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(-n\sin^2 x) \cdot f(x)$$

est une fonction λ-mesurable, car elle est produit d'une fonction continue et une fonction λ-mesurable. La suite des ces fonctions converge simplement vers

$$f_\infty\colon [0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) \cdot \mathbf{1}_{\pi\cdot\mathbb{N}}(x)$$

où $\pi \cdot \mathbb{N} := \{0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots\}$, parce que la limite du facteur $\exp(-n\sin^2 x)$ est

$$\lim_{n\to\infty} \exp(-n\sin^2 x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sin x \neq 0 \\ 1 & \text{si } \sin x = 0. \end{cases}$$

C'est à dire, f_n converge λ-presque partout vers la fonction 0.
Les fonctions f_n sont toutes dominée par $g := |f|$. Comme $f = f^+ - f^-$ est λ-intégrable alors $|f| = f^+ + f^-$ l'est aussi. On obtient donc avec le théorème de la convergence dominée que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \exp(-n\sin^2 x) \cdot f(x)\, dx = \int_{[0,\infty[} f \cdot \mathbf{1}_{\pi\cdot\mathbb{N}}\, dx = \int_{[0,\infty[} 0\, dx = 0\ .$$