Feuille d'exercices V.

Intégration

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Écrire de manière plus simple la quantité $\int f d\mu$ lorsque :

1. μ est une mesure de Dirac ;
2. μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice 2. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes :

1. si $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = \mu(A)$;
2. si $f = a1_A + b1_B$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathcal{T}$ alors $\int f d\mu = a\mu(A) + b\mu(B)$;
3. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et vérifie $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$ alors f est intégrable ;
4. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est intégrable alors $\mu(f^{-1}(\{\infty\})) = 0$;
5. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et vérifie $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$;
6. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f d\mu = 0$ alors $f = 0$ μ-p.p. ;
7. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p.p. alors $\int f d\mu = 0$;
8. si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable et $\int_\Omega f d\mu < \infty$ alors $f < \infty$ μ-p.p.
9. le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice 3.

1. On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
Montrer que f est Lebesgue intégrable et calculer son intégrale.
2. Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } \cos(x) \in \mathbb{Q} \\ \sin^2(x) & \text{si } \cos(x) \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f : \Omega \to [0, \infty]$ est mesurable alors $\int f d\mu = \sup\{(1 - \varepsilon) \int u d\mu : u \text{ étagée},\ 0 \leq u \leq f, 0 < \varepsilon < 1\}$.

Exercice 5. Soient $I = (0, 1)$ et $0 < \alpha < \infty$. A quelle condition la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est-elle Lebesgue intégrable sur I ?

Exercice 6. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx < +\infty$.
En fonction de la valeur de α, déterminer, si elle existe, la limite suivante :
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} dx.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue λ. Soit

$$F(x) = \int_{]-\infty, x]} f d\lambda.$$

Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$f_n(x) = \begin{cases} x - n & \text{si } x \geq n \\ 0 & \text{si } x < n \end{cases}$$

Montrer que

1. chaque f_n est borélienne positive ;
2. $f_n \searrow 0$;
3. $\int f_n d\lambda$ ne converge pas vers $\int \lim\limits_{n\to\infty} f_n d\lambda$.

Exercice 9. $(\star)$ Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

1. Soit $A = \{x \in \Omega : f(x) \geq 1\}$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f^n d\mu$.
2. On suppose que $\int_{A^c} f d\mu < \infty$. Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A^c} f^n d\mu$.

Exercice 10. $(\star)$

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si (f_n) est une suite de fonctions boréliennes positives sur I alors
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_I f_n d\lambda = \int_I (\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n) d\lambda.$$
2. En déduire la valeur de
$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice 11. En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n = 1_{[n,n+1)}$ montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction λ-intégrable. Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \exp(-n \sin^2 x) f(x) dx.$$

Exercice 13. $(\star)$ Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx.$$

Exercice 14. **($\star$)(formule de transfert)** Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On définit sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la "mesure image" $\nu(B) = \mu(f^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. (La mesure ν est notée souvent par $f_*\mu$.) Montrer que si $\Phi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ est une fonction borélienne nous avons la *formule de transfert*

$$\int_\Omega \Phi \circ f d\mu = \int_\mathbb{R} \Phi d\nu.$$

(Indication : On pourra considérer d'abord le cas où Φ est une fonction étagée.)

Exercice 15. **($\star$)**

1. Montrer que
$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx$$
converge.
2. Est-ce que la fonction $|\frac{\sin(x)}{x}|$ Lebesque intégrable ?