Feuille d'exercices VI.

Théorème de Fubini

Exercice 1. Pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, on pose

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
2. La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice 2. On considère le domaine $\Delta \subseteq \mathbb{R}^2$ délimité par les droites $y=0$, $y=1$, $y=2-x$ et $y = 1+\frac{x}{2}$. Calculer $\displaystyle\iint_D xydx\,dy$.

Exercice 3. Calculer $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-(x+y)}dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \leq x,\ 0 \leq y,\ x+y \leq 1\}$.

Exercice 4. Soit Δ le triangle de sommets $(0,-1)$, $(3,1)$ et $(0,1)$. Calculer $\displaystyle\iint_\Delta xy^2dxdy$.

Exercice 5. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y-2| \leq 1 \text{ et } (x-1)(x-y) \leq 0\}$. Calculer $\displaystyle\iint_E e^{(3-x)^2}dxdy$.

Exercice 6. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |y| \leq 2,\ |x| \leq \frac{y^2}{4}+1,\ y \leq x^2+1\}$. Calculer l'aire de D.

Exercice 7. Soit $D = [0,1]^2$. Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2}$.

Exercice 8. On note D le domaine délimité par les droites $x=0$, $y=x+2$ et $y=-x$. Calculer $I = \displaystyle\iint_D (x-y)dxdy$.

Exercice 9. En calculant de deux façons

$$I = \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{1} e^{-x}\sin(2xy)dydx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\frac{\sin^2 x}{x}dx$.

Exercice 10. 1. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$ est bien définie et que $I = 2\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx$.

2. Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+} \frac{dxdy}{(1+y)(1+x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

3. Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de $\frac{1}{1-x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \text{ puis que } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\ .$$

Exercice 11. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 e^{-tx}\,dx$ et par $g(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} e^{-tx}\,dx$, respectivement.

1. Pour $t > 0$, calculer $g(t)$ en partant de l'égalité $\frac{\sin(x)}{x} = \int_0^1 \cos(xy)dy$.
2. Pour $t > 0$, calculer $f(t)$ en partant de l'égalité $\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}dy$.
3. On a vu (exercice 4 feuille VI) que f est continue sur $\mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx$.

Exercice 12. Pour $y > 0$, on considère la fonction f_y définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f_y(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+y^2t^2)}$.

1. Montrer que chaque $y > 0$, la fonction f_y est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ par $g(y,t) = \int_0^1 f_y(x,t)dx$. Justifier que g est λ_2-intégrable sur $[0,1] \times \mathbb{R}^+$.
3. En déduire la valeur de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.