

Feuille d'exercices VI.

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1. Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(0)$ en $0 = (0, 0)$:

1. $C_1 = [0, +\infty[\times \mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0, +\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1, 1]^2$, 4. $C_4 = \{(x, y) \in [0, 1]^2 : x \leq y\}$.

Exercice 2. 1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe.

Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?

2. Soit $A = \{0\} \cup]0, +\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans \mathbb{R}^2 et calculer $T_A(0)$ puis $N_A(0)$.

3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $N_B(0)$ et $N_{A \cap B}(0)$.

4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $N_{A \cap B}(c)$ et $N_A(c) + N_B(c)$. (Pour une meilleure relation dans un cas particulier on pourra voir aussi l'exercice 21. 2)

Exercice 3. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$.

2. $\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1$.

3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

4. $\forall x > -1, \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est croissante sur \mathbb{R} .

Exercice 5. Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.

2. Montrer que f est strictement convexe sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Soient E, F des e.v. sur \mathbb{R} .

1. Soient $f : E \rightarrow \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.

2. Si $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et $A : F \rightarrow E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.

3. Montrer que $f(x, y) = (|2x + 3y| + |x - y|)^p$ est convexe sur \mathbb{R}^2 pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 7. 1. Prouver que la fonction f définie par $f(x, y) = xy$ n'est pas convexe sur \mathbb{R}^2 , mais que les fonctions g, h définies par $g(x, y) = x^2 + y^2$ et $h(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.

2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$i(x, y) = \exp(x + y), j(x, y) = \exp(xy), k(x, y) = \exp(x) + \exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur \mathbb{R}^2 ?

Exercice 8. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1, 1]^2$:

$$h_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, h_2(x, y) = \frac{x^4 + y^4}{12}, h_3(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{3}, h_4(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

Exercice 9. Soit $f(x, y, z) = (2x + y)^2 + (2x + z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

$$C_1 = \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, C_2 = \{(x, 0, z), (x, z) \in \mathbb{R}^2\}, C_3 = \{(0, y, z), (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est-ce que f est convexe sur \mathbb{R}^3 ?

Exercice 10. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x, y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A .
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Exercice 11. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2 y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Exercice 12. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = e^{2(x^2 - y) - \cos(x^2 - y)}$$

sur le convexe $A := [0, +\infty[^2$.

1. Montrer que $g(x) = e^{2x - \cos(x)}$ définit une fonction strictement convexe et strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. Prouver que f est strictement convexe et continue sur A .

3. En utilisant le critère différentiel de minimisation d'une fonction convexe, montrer qu'il n'existe pas de solution au problème de minimisation.
4. Retrouver ce résultat en calculant l'infimum de f sur A et montrant qu'il n'est pas atteint.

Exercices plus difficiles

Exercice 13. Soit C un convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a, b] \subset C$, la restriction $f|_{[a,b]}$ est convexe.

Exercice 14. 1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.

2. Soit C convexe fermé de E . Soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Montrer que f est convexe.

3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 13)

Exercice 15. 1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x - \cos(x)}$ est convexe sur \mathbb{R} .

2. Soit $f : I \rightarrow]0, +\infty[$, où I est un intervalle de \mathbb{R} . Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?

3. Application : Montrer que $x \mapsto (1+x)^x$ est convexe sur $] -1, +\infty[$.

Exercice 16. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 17. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.

2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 18. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ une fonction concave. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 19. Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , majorée, de classe C^2 . On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x \geq 0 \quad f''(x) \geq af(x) \geq 0.$$

1. Montrer que f est décroissante.

2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

Exercice 20. Montrer que pour S une partie fermé non-vidé de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s \in S} \|x - s\|$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercice 21. Soit g_1, \dots, g_n des fonctions convexes C^1 définies sur \mathbb{R}^m tel qu'il existe $x_0 \in A$ avec $g_i(x_0) < 0$ pour tout i . Soit la contrainte :

$$A = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, \dots, n\}, g_i(x) \leq 0\}.$$

1. Soit $x \in A$ avec $g_1(x) = \dots = g_l(x) = 0$ (contraintes actives en x) et $g_{l+1}(x) < 0, \dots, g_n(x) < 0$. Montrer que

$$N_A(x) = \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i \nabla g_i(x), \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

2. Soit $I \subset \{1, \dots, n\}$, $B = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ et $C = \{x \in \mathbb{R}^m : \forall i \in \{1, \dots, n\} \setminus I, g_i(x) \leq 0\}$ et $x \in B \cap C$. En déduire que $N_{B \cap C}(x) = N_B(x) + N_C(x)$.
3. Si x minimise une fonction convexe f sur A . Montrer que x vérifie $\nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \nabla g_i(x) = 0$ pour $\lambda_i \geq 0$ (et $\lambda_i = 0$ si la i -ème contrainte n'est pas active)
4. On considère le problème de minimiser $f(x, y) := (x - 3)^2 + (y - 2)^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 \leq 5, -x + 2y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0$.

Prouver qu'une solution existe qui n'est pas $(0, 0)$ et en déduire que la solution satisfait $f(x, y) < 13$.

Trouver la solution (en se guidant graphiquement et en utilisant les conditions nécessaires). (Indication : Graphiquement, on se doute que la contrainte saturée au minimiseur va être $x^2 + y^2 = 5$)

Exercices d'entraînements

Exercice 22. Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$ et en $a_2 = (0, 1)$.
2. $C_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 1| + |y| \leq 1\}$ en $a_1 = (0, 0)$, en $a_3 = (1, 0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.

Exercice 23. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x, y) = x^4 + x^2 y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A .
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
3. Trouver la solution.

Exercice 24. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur \mathbb{R}^2 .

$$f_0(x, y) = x^2 + y^2 + x^4, \quad f_1(x, y) = x^2 + y^2 + x^3, \quad f_2(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy, \quad f_3(x, y) = \cos(x + y),$$

$$f_4(x, y) = x e^y + y e^x, \quad f_5(x, y) = |x + 1| + |y|, \quad f_6(x, y) = (|x + 1| + |y|)^2.$$

Exercice 25. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0, 1]^2$:

$$g_1(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{6}, \quad g_2(x, y) = \frac{x^4 + y^6}{12}, \quad g_3(x, y) = -\sqrt{2 - (x^2 + y^2)}$$

$$g_4(x, y) = \frac{x^2 y^2}{2}, \quad g_5(x, y) = \cos(xy), \quad g_6(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{6}.$$