Feuille d'exercices VI.

Ensembles et fonctions convexes

Correction des Exercices d'entraînements

Exercice 22. Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$ et en $a_2 = (0,1)$.
   $C_5 = \overline{B(0,1)}$ est la boule fermée pour la norme euclidienne donc convexe. $a_1 \in B(0,1) = Int(\overline{B(0,1)})$ donc d'après le cours $N_{C_5}(a_1) = \{0\}$.

   Le calcul de $N_{C_5}(a_2)$ est plus dur (on passe par le calcul du tangent jamais fit en TD pour se ramener à une calcul de la forme vue en TD). On calcule $T_{C_5}(a_2) = \{(x,y) : y \leq 0\} = \mathbb{R}\times]-\infty,0]$. On rappelle que $T_{C_5}(a_2) = \overline{\mathbb{R}_+(C_5 - a_2)}$ Si $(x,y) \in C_5$ alors $y^2 \leq 1$ donc $y \leq 1$ donc $(x,y) - (0,1) = (x, y-1) \in \mathbb{R}\times]-\infty,0]$ qui est fermé donc $T_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}\times]-\infty,0]$.
   Réciproquement, on va dire que pour toute direction du demi-plan ouvert $\mathbb{R}\times]-\infty,0[\subset \mathbb{R}_+(C_5 - a_2)$. En effet si $y < 0$ on cherche $\lambda > 0$ telle que $(\lambda x, 1+\lambda y) \in C_5$ ce qui donne $\lambda^2 x^2 + 1 + \lambda^2 y^2 + 2\lambda y \leq 1$, il suffit $0 < \lambda = 2|y|/(x^2+y^2)$. En prenant l'adhérence, on obtient :

   $$\mathbb{R}\times]-\infty,0] \subset \overline{\mathbb{R}\times]-\infty,0[} \subset \overline{\mathbb{R}_+(C_5 - a_2)} = T_{C_5}(a_2).$$

   La première inclusion vient de $(x, y-1/n) \in \mathbb{R}\times]-\infty,0[$ pour $y \leq 0$ et converge vers (x,y) donc la caractérisation séquentielle implique l'inclusion.

   On a vu en cours que
   $$N_{C_5}(a_2) = N_{T_{C_5}(a_2)}(a_2).$$
   Donc on montre comme à l'exo 1 que cela vaut $R_+(0,1)$. D'abord, $(0,1) \in N_{C_5}(a_2)$ est évident car si $(x,y) \in C_5\langle(x,y-1),(0,1)\rangle = y-1 \leq 0$. De même,$(0,-1) \notin N_{C_5}(a_2)$.
   Donc par le cours, comme $N_{C_5}(a_2)$ est un cône, on a obtenu

   $$\mathbb{R}_+(0,1) \subset N_{C_5}(a_2).$$

   Réciproquement, $a_2 \in [(-1,1),(1,1)] \subset T_{C_5}(a_2)$ donc

   $$N_{C_5}(a_2) = N_{T_{C_5}(a_2)}(a_2) \subset N_{[(-1,1),(1,1)]}(a_2) = \mathbb{R}(2,0)^\perp = \mathbb{R}(0,1).$$

   Comme on a vu $(0,-1) \notin N_{C_5}(a_2)$. Donc $N_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}(0,1)$, on déduit $N_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}_+(0,1)$ ce qui est l'autre inclusion voulue.

2. $C_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1|+|y| \leq 1\} = \overline{B_{||.||_1}((1,0),1)}$ est une boule fermé donc convexe (pour la norme $||(x,y)||_1 = |x|+|y|$ cf TD 5). On veut calculer les cônes normaux $a_1 = (0,0)$, en $a_3 = (1,0)$ et en $a_4 = (1/2,1/2)$. Comme avant $Int(C_6) = B_{||.||_1}((1,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1|+|y| < 1\}$ $a_3 \in Int(C_6)$ et donc d'après le cours $N_{C_6}(a_3) = \{0\}$.

   Montrons que $N_{C_6}(a_4) = \mathbb{R}_+(-1,1)$.
   On montre d'abord que $(-1,1) \in N_{C_6}(a_4)$ si $(x,y) \in C_6$, on regarde :
   $\langle (x,y)-(a_4),(-1,1)\rangle = -(x-1/2)+(y-1/2) = y-x \leq 0$ car $(1-x)+y \leq |x-1|+|y| \leq 1$ donc $y-x \leq 0$ sur C_6 donc $(-1,1) \in N_{C_6}(a_4)$.
   Réciproquement, $a_4 \in [(0,0),(1,1)] \subset C_6$ on déduit $N_{C_6}(a_4) \subset N_{[(0,0),(1,1)]}(a_4) = \mathbb{R}(1,1)^\perp = \mathbb{R}(-1,1)$ vu que a_4 est dans le segment privé des extrémités. Il reste à voir que $(1,-1)$ n'est pas dans $N_{C_6}(a_4)$, en effet, $\langle (x,y)-(a_4),(1,-1)\rangle = x-y$ ce n'est pas négatif en $(1,0) \in C_6$, donc $N_{C_6}(a_4) \subset \mathbb{R}_+(-1,1)$, ce qui donne l'égalité.

   Montrons que $N_{C_6}(a_1) = \mathbb{R}_+(-1,1)+\mathbb{R}_+(-1,-1)$. On raisonne par double inclusion :
   Comme avant, on commence par montrer que $(-1,1),(-1,-1)$ sont dans le cône normal. on calcule donc pour $(x,y) \in C_6$ $\langle (x,y)-(a_1),(-1,1)\rangle = -(x-0)+(y-0) = y-x \leq 0$ comme avant donc $(-1,1) \in N_{C_6}(a_1)$.
   De même $\langle (x,y)-(a_1),(-1,-1)\rangle = -(x-0)-(y-0) = -y-x \leq 0$
   $(1-x)-y \leq |x-1|+|y| \leq 1$ donc $(-1,-1) \in N_{C_6}(a_1)$. Comme $N_{C_6}(a_1)$ est un cône convexe, on déduit :

$$\mathbb{R}_+(-1,1)+\mathbb{R}_+(-1,-1) \subset N_{C_6}(a_1).$$

   Réciproquement, on considère $a_1 = (0,0) \in [(0,0),(1,1)] \subset C_6$, donc par le cours $N_{C_6}(a_1) \subset N_{[(0,0),(1,1)]}(a_1) = \mathbb{R}(1,1)^\perp + R_+(-1,-1) = \mathbb{R}(-1,1)+R_+(-1,-1) = \{(x,y) : y \leq -x\}$ (car a_1 est sur le bord du segment). On considère enfin $a_1 = (0,0) \in [(0,0),(1,-1)] \subset C_6$ $N_{C_6}(a_1) \subset N_{[(0,0),(1,-1)]}(a_1) = \mathbb{R}(1,-1)^\perp + R_+(-1,1) = \mathbb{R}(-1,-1)+R_+(-1,1) = \{(x,y) : y \geq x\}$.
   En prenant l'intersection on obtient $N_{C_6}(a_1) \subset \{(x,y) : -x \geq y \geq x\}$. L'examen de ces conditions identifie ceci à un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+(-1,1)+\mathbb{R}_+(-1,-1)$ en écrivant $(x,y) = -(y+x)/2(-1,-1)+(y-x)/2(-1,1)$ vu les deux nombres $(y-x)/2, -(y+x)/2 \geq 0$. Cela donne l'inclusion réciproque

$$N_{C_6}(a_1) \subset \mathbb{R}_+(-1,1)+\mathbb{R}_+(-1,-1).$$

Exercice 23. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^3 + 18x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 16y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y^3 + 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx^2 + 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$

Comme

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y).((h,k),(h,k)) &= (12x^2 + 2y^3 + 18)h^2 + 6xy^2 2hk + (6yx^2 + 16)k^2 \\ &\geq (2y^3 + 18)h^2 + (6yx^2 + 16)k^2 + 6xy^2 kh \\ &\geq (18-4)h^2 + (16-12)k^2 - 12(\frac{k^2}{4} + h^2) = 2h^2 + k^2 \\ &\geq h^2 + k^2 = \langle I_2(h,k),(h,k)\rangle \end{aligned}$$

pour $|y|, |x| < \sqrt[3]{2}$, de sorte qu'on a utilisé à l'avant-dernière ligne $|y^3|, |yx^2|, |xy^2| < 2$, et $2hk \leq (\frac{k^2}{4} + h^2)$.

On obtient donc $H(f)(x,y) \geq I_2$, donc par le cours f est strictement convexe sur l'ouvert $]-\sqrt[3]{2}, +\sqrt[3]{2}[^2 \supset A$

2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)

   Par continuité, la fonction admet un minimum sur le compact A (boule fermé donc fermé borné en dimension finie), il est unique par convexité stricte.
3. On trouve la solution en cherchant les minima locaux. On remarque que $(0,0)$ annule le gradient, c'est donc un point critique sur l'ouvert $Int(A)$, donc c'est l'unique minimum sur tout A. (par exemple on utilise le théorème de minimisation sur un convexe et $-\nabla f(0,0) \in N_A(0) = \{0\}$ vu $0 \in Int(A)$).

Exercice 24. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_0(x,y) = x^2+y^2+x^4,\ f_1(x,y) = x^2+y^2+x^3,\ f_2(x,y) = x^4+y^4-4xy,\ f_3(x,y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x,y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x,y) = |x+1| + |y|,\ f_6(x,y) = (|x+1| + |y|)^2.$$

On commence f_0, f_1, f_2 qui sont des polynômes donc de classe C^∞.

1. $Hf_0(x,y) = \begin{pmatrix} 2+12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. qui est positive car ces valeurs propres $2+12x^2, 2 \geq 0$, donc f_0 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
2. $Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_1(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a un déterminant -8 négatif, donc $Hf_1(-1,0)$ n'est pas positive et donc f_1 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.
3. $Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, a un déterminant -16 négatif, donc $Hf_2(0,0)$ n'est pas positif et donc f_2 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.
4. f_3 est périodique non constante, on se doute qu'elle ne va pas être convexe (mais ce n'est pas une preuve, on n'a pas vu de résultat de ce type en cours), elle est C^∞ par composition de cos et d'une fonction linéaire, $\nabla f_3(x,y) = (-sin(x+y), -\sin(x+y))$, donc $Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} -cos(x+y) & -cos(x+y) \\ -cos(x+y) & -cos(x+y) \end{pmatrix}$, par exemple

$Hf_3(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, son déterminant $rt - s^2 = 0$ mais $r = -1 < 0$ donc $Hf_3(0,0)$ n'est pas positive, donc f_3 n'est pas convexe.

5. $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$.
   $Hf_4(-1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$. On a donc $rt - s^2 = e^{-1}(1-4) < 0$, donc $Hf_4(-1,1)$ n'est pas positive et f_4 n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.
6. f_5, f_6 ne sont pas même C^1 à cause des valeurs absolues, on ne peut pas dériver, on n'utilise une méthode proche de l'exercice 6.
   $f_5(x,y) = ||(x,y) + (1,0)||_1$ vu $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$, est la composée de la norme qui est convexe (par le cours), avec la fonction affine $A(x,y) = (x,y) + (1,0)$. On remarque que : $A(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y')) = \lambda(A(x,y)) + (1-\lambda)(A(x',y'))$
   Donc, on obtient la convexité en utilisant la convexité de la norme pour $\lambda \in [0,1]$:
   $$||A(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y'))|| = ||\lambda(A(x,y))+(1-\lambda)(A(x',y'))||_1 \leq \lambda||A(x,y)||_1+(1-\lambda)||A(x',y')||_1$$
7. f_6 est la composée de f_5 convexe et $g(x) = x^2$ (une fonction croissante convexe) donc par l'exercice 6 : $f_6 = g \circ f_5$ est convexe. Concrètement, on peut (utiliser la convexité de f_5 :$f_5(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y') \leq \lambda f_5(x,y) + (1-\lambda) f_5(x',y')$ auquel on applique la croissance de g, puis on utilise la convexité de g) :
   $$g \circ f_5(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')) \leq g(\lambda f_5(x,y)+(1-\lambda)f_5(x',y')) \leq \lambda(g \circ f_5(x,y))+(1-\lambda)(g \circ f_5(x',y'))$$

Exercice 25. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0,1]^2$:

$$g_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6},\ g_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12},\ g_3(x,y) = -\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

$$g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x,y) = \cos(xy),\ g_6(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{6}.$$

ON commence g_1, g_2, g_4, g_6 qui sont des polynômes donc C^∞, on calcule donc les dérivées secondes.

1. $Hg_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. C'est positif sur $[0,1]^2$ et même $\mathbb{R}_+^2$ (car à valeur propre positive) mais pas sur un voisinage ouvert. Par contre, c'est le cas sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, où g_1 est donc convexe (on va étendre la convexité par continuité). Pour $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$, on a $(x+1/n, y+1/n) \in]0,+\infty[^2$ donc la convexité s'écrit pour $\lambda \in [0,1]$:
   $$g_1(\lambda(x+1/n,y+1/n)+(1-\lambda)(x'+1/n,y'+1/n)) \leq \lambda g(x+1/n,y+1/n)+(1-\lambda)g(x'+1/n,y'+1/n),$$
   en passant à la limit $n \to \infty$ vu g continue, on obtient l'inégalité voulue :
   $$g_1(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')) \leq \lambda g(x,y) + (1-\lambda)g(x',y'),$$

2. g_2 est plus simple car $Hg_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ est à valeurs propres positives sur $\mathbb{R}^2$ donc g_2 convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $[0,1]^2$.
3. $\nabla g_4(x,y) = (xy^2, yx^2)$ donc $Hg_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$.
   le déterminant $rt - s^2 = x^2y^2 - 4x^2y^2 \leq 0$ et en $(1/2, 1/2)$ vaut $-3/16 < 0$ donc $Hg_4(1/2, 1/2)$ n'est pas positive, donc g_4 n'est pas convexe.
4. $Hg_6(x,y) = \begin{pmatrix} 2+x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. à des valeurs propres positives sur l'ouvert $]-2, +\infty[\times\mathbb{R}$ donc g_6 est convexe sur cet ouvert donc sur $[0,1]^2$.
5. g_5 est C^∞ comme composée de cosinus et d'un polynôme. $\nabla g_5(x,y) = (-ysin(xy), -x\sin(xy))$, donc

   $$Hg_5(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2cos(xy) & -\sin(xy) - xycos(xy) \\ -\sin(xy) - xycos(xy) & -x^2cos(xy) \end{pmatrix},$$

   $r = -y^2cos(xy)$ est négatif en $(1,1)$ ($cos(1) \in [0,1]$) donc $Hg_5(1,1)$ n'est pas positive donc g_5 n'est pas convexe.
6. Reste le cas le plus dur, celui de g_3 (On a l'intuition que g_3 est le graphe de la partie d'ordonnée négative d'une sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$, ce qui semble convexe visuellement... Il serait facile de voir par composition que $-g_3$ est la compose d'une fonction concave croissante (la racine) et d'une fonction concave, qui est donc concave, on le montre par dérivation), Si x<1 ou y<1, on a $x^2 + y^2 < 2$ donc g_3 est a composée d'un polynôme à valeur strictement positif sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \subset B_{||\cdot|||_2}(0, \sqrt{2})$ et de $x \mapsto -\sqrt{x}$ qui est C^∞ sur $]0, \infty[$ (mais pas dérivable en 0). Donc par composée g_3 est C^∞ sur $B_{||\cdot|||_2}(0, \sqrt{2})$.
   On calcule les dérivées premières et secondes : $\nabla g_3(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}})$

   $$\begin{aligned} Hg_3(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2-y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{2-x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

   Son déterminant

   $$rt - s^2 = ((2-x^2)(2-y^2) - x^2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 = (4-2x^2-2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 \geq 0$$

   est positif si $x^2 + y^2 < 2$ et $r \geq 0$ donc $Hg_3(x,y)$ est positive sur la boule ouverte euclidienne $B_{||\cdot|||_2}(0, \sqrt{2})$. Par continuité comme pour g_1, g_3 est aussi convexe sur l'adhérence (la boule fermé) qui contient $[0,1]^2$, ceci conclut à g_3 convexe sur cet ensemble.