Feuille d'exercices VI.

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1. Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes tengents $T_{C_i}(0)$ en $0 = (0,0)$:
1. $C_1 = [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0,+\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1,1]^2$, 4. $C_4 = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$.

Exercice 2.
1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe. Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?
2. Soit $A = \{0\}\cup]0,+\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $T_A(0)$.
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $T_B(0)$ et $T_{A\cap B}(0)$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A\cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$.

Exercice 3. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :
1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \dfrac{\pi}{2}],\ \dfrac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{x}{2}$.

Exercice 4. Montrer que la fonction définie par $f(x) = \frac{e^x-1}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soient E, F des e.v. sur $\mathbb{R}$.
1. Soient $f : E \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe et $A : F \to E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x,y) = (|2x+3y| + |x-y|)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Exercice 7.
1. Prouver que la fonction f définie par $f(x,y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x,y) = x^2 + y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.
2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).

$$i(x,y) = exp(x+y), j(x,y) = exp(xy), k(x,y) = exp(x) + exp(y).$$

Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 8. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1,1]^2$:

$$h_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6}, h_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12},\ h_3(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{3},\ h_4(x,y) = x^4+y^4-4xy.$$

Exercice 9. Soit $f(x,y,z) = (2x+y)^2 + (2x+z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

   $$C_1 = \{(x,y,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2\},\ \ C_2 = \{(x,0,z), (x,z) \in \mathbb{R}^2\},\ \ C_3 = \{(0,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

   sont convexes.
2. Est-ce que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0,2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A.
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Exercice 11. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Exercice 12. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = e^{2(x^2-y)-cos(x^2-y)}$$

sur le convexe $A := [0,+\infty[^2$.

1. Montrer que $g(x) = e^{2x-cos(x)}$ définit une fonction strictement convexe et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que f est strictement convexe et continue sur A.
3. En utilisant le critère différentiel de minimisation d'une fonction convexe, montrer qu'il n'existe pas de solution au problème de minimisation.
4. Retrouver ce résultat en calculant l'infimum de f sur A et montrant qu'il n'est pas atteint.

Exercices plus difficiles

Exercice 13. Soit C un convexe et $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction, montrer que f est convexe sur C si et seulement si pour tout intervalle $[a, b] \subset C$, la restriction $f_{|[a,b]}$ est convexe.

Exercice 14.
1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que
$$\forall x, y \in C \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$
Montrer que f est convexe.
3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 13)

Exercice 15.
1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{2x-\cos(x)}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $f \colon I \to]0, +\infty[$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $\ln(f)$ est convexe alors f est convexe. Réciproque ?
3. Application : Montrer que $x \mapsto (1 + x)^x$ est convexe sur $] - 1, +\infty[$.

Exercice 16. Montrer que si $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convexe et tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ alors f est à valeurs positives (on pourra commencer par justifier le fait que f est décroissante).

Exercice 17. Soit $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.
1. Montrer que si f est à valeurs négatives alors f est constante.
2. Montrer que s'il existe a, b tels que $f(x) \leq ax + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors f est une fonction affine.

Exercice 18. Soit $f \colon [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ une fonction concave. Montrer que pour tout $x, y \geq 0$ on a $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$.

Exercice 19. Soit f une fonction de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, majorée, de classe C^2. On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que
$$\forall x \geq 0 \ f''(x) \geq af(x) \geq 0 \ .$$
1. Montrer que f est décroissante.
2. Déterminer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
4. Montrer que pour tout $x \geq 0$ on a $f(x) \leq f(0)e^{-x\sqrt{a}}$.

Exercice 20. Montrer que pour S une partie fermé non-vide de E e.v.n. alors la fonction distance $d_S(x) := d(x, S) = \inf_{s \in S} ||x - s||$ est convexe si et seulement si S est convexe.

Exercices d'entraînements

Exercice 21. Commençons avec la définition du cône normal qui est le polaire du cône tangent, c'est à dire si $C \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble convexe et $a \in C$ alors *le cône normal* du convexe C au point a est
$$N_C(a) := \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in T_C(a), \langle v, u\rangle \leq 0\} = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall u \in C, \langle v, u - a\rangle \leq 0\},$$
où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Montrer que les enssemble C_i définis ci-dessous sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$ et en $a_2 = (0,1)$.
2. $C_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$, en $a_3 = (1,0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$.

Exercice 22. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)
3. Trouver la solution.

Exercice 23. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$:

$$f_0(x,y) = x^2+y^2+x^4,\ f_1(x,y) = x^2+y^2+x^3,\ f_2(x,y) = x^4+y^4-4xy,\ f_3(x,y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x,y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x,y) = |x+1| + |y|,\ f_6(x,y) = (|x+1| + |y|)^2.$$

Exercice 24. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0,1]^2$:

$$g_1(x,y) = \frac{x^3+y^5}{6},\ g_2(x,y) = \frac{x^4+y^6}{12},\ g_3(x,y) = -\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

$$g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x,y) = \cos(xy),\ g_6(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{x^3}{6}.$$