Feuille d'exercices VI.

Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1. Montrer que les ensembles C_i suivants sont convexes et trouver les cônes tangents $T_{C_i}(\mathbf{0})$ en $\mathbf{0} = (0,0)$:
1. $C_1 = [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, 2. $C_2 = [0,+\infty[^2$, 3. $C_3 = [-1,1]^2$, 4. $C_4 = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x \leq y\}$.

Correction 1. Une partie C d'un espace vectoriel réel est *convexe* si elle contient tout le segment compris entre deux quelconques de ses points.

Pour simplifier la tâche, nous allons montrer que le produit $A_1 \times A_2 \subset \mathbb{R}^{k_1+k_2}$ de deux parties convexes $A_1 \subset \mathbb{R}^{k_1}$ et $A_2 \subset \mathbb{R}^{k_2}$ est convexe : Soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) deux points de $A_1 \times A_2$, alors $x_0, x_1 \in A_1$ et $y_0, y_1 \in A_2$. Le segment entre les deux points se paramétrise par

$$s(t) = (1-t)\cdot(x_0, y_0) + t\cdot(x_1, y_1)$$

avec $t \in [0,1]$. On voit que

$$s(t) = \big((1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1,\ (1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1\big)\ ,$$

c'est-à-dire, la première composante de $s(t)$ est le segment entre x_0 et x_1 en $\mathbb{R}^{k_1}$ et la deuxième composante de $s(t)$ est le segment entre y_0 et y_1 en $\mathbb{R}^{k_2}$. Comme A_1 et A_2 sont convexes, on obtient que $(1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1 \in A_1$ et $(1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1 \in A_2$ pour tout $t \in [0,1]$, ou autrement dit, $s(t) \in A_1 \times A_2$. Ceci montre que $A_1 \times A_2$ est convexe.

Pour (1), (2), (3), on sait que tout intervalle de $\mathbb{R}$ est convexe peu importe qu'il soit ouvert ou fermé, borné ou non-borné. Clairement les parties C_1, C_2 et C_3 sont donc convexes comme produits de parties convexes.
Pour partie (4), suppose que (x_0, y_0) et $(x_1, y_1) \in C_4$, alors $x_0, x_1, y_0, y_1 \in [0,1]$ et $x_0 \leq y_0$ et $x_1 \leq y_1$. Soit $s(t) = \big(s_x(t), s_y(t)\big)$ le segment entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1). Comme $[0,1]\times[0,1]$ est un convexe, il est clair que le segment $s(t)$ reste dans $[0,1]\times[0,1]$ et il faut juste vérifier $s_x(t) \leq s_y(t)$ pour s'assurer que $s(t) \in C_4$. Ici $x_0 \leq y_0$ et $x_1 \leq y_1$ donc $s_x(t) = (1-t)\cdot x_0 + t\cdot x_1 \leq (1-t)\cdot y_0 + t\cdot y_1 = s_y(t)$ et C_4 est convexe.

Rappelons-nous la définition du cône tangent :

> Le *cône tangent* (au sens de l'analyse convexe) du convexe S dans un e.v.n. E au point $x \in S$ est
>
> $$T_S(x) := \overline{\Big\{\frac{u-x}{s} :\ u \in S, s > 0\Big\}} = \overline{\mathbb{R}_+^* \cdot (S-x)},$$

Pour le produit de deux ensembles convexes $A_1 \times A_2$, nous allons montrer que

$$T_{A_1\times A_2}(x,y) = T_{A_1}(x) \times T_{A_2}(y)\ . \tag{1}$$

Soit $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big)$, alors il existe un $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $(x'', y'') \in A_1 \times A_2$ tq $x' = t\,(x'' - x)$ et $y' = t\,(y'' - y)$. Ceci implique que $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)$ et $y' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)$ ou autrement dit $\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big) \subset \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)$.
Pour prouver l'inclusion dans le sens inverse, soit maintenant $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)$ et $y' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)$, alors il existent $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+^*$, $x'' \in A_1$ et $y'' \in A_2$ tq $x' = t_1\,(x'' - x)$ et $y' = t_2\,(y'' - y)$. Si $t_1 \geq t_2$, on va factoriser t_1, sinon il faudrait factoriser t_2, ce qui ne change pas l'idée principale du calcul

$$\begin{aligned}(x', y') = t_1\left(x'' - x, \tfrac{t_2}{t_1}\,(y'' - y)\right) &= t_1\left(x'' - x,\ \tfrac{t_2}{t_1}\,(y'' - y) + y - y\right) \\ &= t_1\left(x'' - x,\ \left(\tfrac{t_2}{t_1}\,y'' + \tfrac{t_1 - t_2}{t_1}\,y\right) - y\right) = t_1\left(\tilde{x} - x,\ \tilde{y} - y\right)\,,\end{aligned}$$

où $\tilde{x} = x''$ et $\tilde{y} = \frac{t_2}{t_1}\,y'' + \frac{t_1 - t_2}{t_1}\,y$. Comme $s = \frac{t_2}{t_1} \in [0,1]$ et $\frac{t_1 - t_2}{t_1} = 1 - s$, nous avons montré que $\tilde{y}$ se trouve sur le segment entre y' et y, donc par la convexité de A_2, $\tilde{y} \in A_2$.
Ceci montre que $(x', y') \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big)$ et avec le résultat précèdent

$$\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 \times A_2 - (x,y)\big) = \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)\,.$$

Pour obtenir le cône tangent, on prend l'adhérence de deux côté

$$T_{A_1 \times A_2}(x,y) = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)}\,.$$

Pour toutes parties $A \subset \mathbb{R}^{k_1}$ et $B \subset \mathbb{R}^{k_2}$, l'adhérence d'un produit est égale au produit des adhérences, c'est-à-dire

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}\,.$$

Dans une direction, l'inclusion est évidente parce que l'adhérence $\overline{A \times B}$ et le sous-ensemble fermé le plus petit contenant $A \times B$ et le produit $\overline{A} \times \overline{B}$ est fermé et contient bien $A \times B$, donc $\overline{A \times B} \subset \overline{A} \times \overline{B}$. Pour l'autre inclusion, nous pouvons utiliser qu'il existe pour tout $x_\infty \in \overline{A}$ et tout $y_\infty \in \overline{B}$ une suite $(x_n) \subset A$ et une suite $(y_n) \subset B$ tq $x_n \to x_\infty$ et $y_n \to y_\infty$. Ceci implique que $(x_n, y_n) \subset A \times B$ est une suite qui converge vers (x_∞, y_∞) et $(x_\infty, y_\infty) \in \overline{A \times B}$.
On obtient donc

$$\begin{aligned}&\overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big) \times \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)} \\ &\qquad = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_1 - x\big)\Big)} \times \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A_2 - y\big)\Big)} = T_{A_1}(x) \times T_{A_2}(y)\end{aligned}$$

et nous avons réussi à prouver l'équation (1).

Avec ce résultat on obtient donc

$$T_{C_1}(\mathbf{0}) = [0, \infty[\times\mathbb{R}, \quad T_{C_2}(\mathbf{0}) = [0, +\infty[^2, \quad T_{C_3}(\mathbf{0}) = \mathbb{R}^2$$

et pour $T_{C_4}(\mathbf{0})$ note que $\mathbb{R}_+^*\,\big(C_4 - \mathbf{0}\big) = \mathbb{R}_+^*\,C_4$ est $\big\{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x \leq y\big\}$. Cet ensemble est fermé, on trouve $T_{C_4}(\mathbf{0}) = \big\{(x,y):\ x \geq 0, y \geq 0, x \leq y\big\}$.

Exercice 2. 1. Soient A, B deux convexes. Montrer que $A \cap B$ est convexe. Est-ce que $A \cup B$ est convexe ?

2. Soit $A = \{\mathbf{0}\} \cup]0, +\infty[^2$. Montrer que A est convexe dans $\mathbb{R}^2$ et calculer $T_A(\mathbf{0})$.
3. Soit $B =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$, calculer $T_B(\mathbf{0})$ et $T_{A\cap B}(\mathbf{0})$.
4. Soient A, B deux convexes généraux avec $c \in A \cap B$, trouver une relation entre $T_{A\cap B}(c)$ et $T_A(c) \cap T_B(c)$.

Correction 2. 1. Comme A et B sont *convexes*, elles contiennent tout le segment compris entre deux quelconques de leur points.

Si $x, y \in A \cap B$ alors le segment $[x, y] \subset A$ car A est convexe et $[x, y] \subset B$ car B est convexe. Ceci montre que $[x, y] \subset A \cap B$ et $A \cap B$ est convexe.

Par contre, soient $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{1\} \subset \mathbb{R}$, alors $A \cup B = \{0, 1\}$ n'est pas connexe et certainement pas convexe. En générale donc, la réunion de deux convexes n'est pas convexe.

2. Clairement $]0, +\infty[^2$ est convexe comme produit de deux convexes. Pour montrer que A est convexe, il suffit de vérifier que tout segment entre $\mathbf{0}$ et un point $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ est compris dans A.

   Le segment est de la forme $(1-t) \cdot \mathbf{0} + t \cdot (x, y) = t \cdot (x, y) = (tx, ty)$ avec $t \in [0, 1]$. Si $t \neq 0$, alors $(tx, ty) \in]0, +\infty[^2$, si $t = 0$, alors $(tx, ty) = \mathbf{0}$, donc le segment entier est contenu dans A et A est convexe.

   Pour trouver le cône tangent, on vérifie sans problème que
$$\mathbb{R}_+^* \big(A - \mathbf{0}\big) = \mathbb{R}_+^* A = A$$
   et l'adhérence de $\mathbb{R}_+^* \big(A - \mathbf{0}\big)$ est $T_A(\mathbf{0}) = [0, \infty[^2$.

3. En exo 1, nous avons vu que le cône tangent d'un produit de convexes et le produit des cônes tangents correspondants, ici donc $T_B(\mathbf{0}) =]-\infty, 0] \times \mathbb{R}$. L'intersection $A \cap B = \{\mathbf{0}\}$ consiste seulement de l'origine et son cône tangent est $T_{A\cap B}(\mathbf{0}) = \{\mathbf{0}\}$.

4. Si $x' = t \cdot (x - c)$ avec $x \in A \cap B$ et $t > 0$, alors $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)$ et $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)$, ce qui implique l'inclusion $\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big) \subset \big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\big) \cap \big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\big)$.

   Pour l'inclusion dans le sens inverse, soit $x' = t_A \cdot (x_A - c)$ et $x' = t_B \cdot (x_B - c)$ avec $x_A \in A$, $x_B \in B$, et $t_A, t_B > 0$. Suppose que $t_B \geq t_A$, alors $x_B = \frac{t_A}{t_B} \cdot (x_A - c) + c = \frac{t_A}{t_B} \cdot x_A + \frac{t_B - t_A}{t_B} \cdot c$. Comme $s = \frac{t_A}{t_B} \in]0, 1]$ et $\frac{t_B - t_A}{t_B} = 1 - s$, on voit que x_B se trouve sur le segment entre x_A et c, c'est-à-dire, $x_B \in A$, donc $x_B \in A \cap B$. Si $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big) \cap \mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)$, alors $x' \in \mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big)$ et nous avons montré
$$\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A \cap B - c\big) = \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\Big) .$$
   Si l'on prend l'adhérence de deux côtés on trouve
$$T_{A\cap B}(c) = \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(A - c\big)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot \big(B - c\big)\Big)} .$$
   Malheureusement (ou non ; selon vos goûts), en générale $\overline{X \cap Y} \neq \overline{X} \cap \overline{Y}$ comme peut être vérifié par exemple avec $X = \mathbb{Q}$ et $Y = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, car $X \cap Y = \emptyset$, mais

$\overline{X} \cap \overline{Y} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}$! À la place, nous avons $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$ car $\overline{X \cap Y}$ est le fermé le plus petit contenant $X \cap Y$; le côté droite contient $X \cap Y$ et est fermé. Pour notre question ici, on trouve que

$$\begin{aligned} T_{A\cap B}(c) &= \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (A-c)\Big) \cap \Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (B-c)\Big)} \\ &\subset \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (A-c)\Big)} \cap \overline{\Big(\mathbb{R}_+^* \cdot (B-c)\Big)} = T_A(\mathbf{0}) \cap T_B(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

et la partie 3 ci-dessus montre que nous ne pouvons pas s'attendre mieux.

Exercice 3. Montrer les inégalités suivantes, à l'aide de raisonnements de convexité :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x > 0,\ \ln(x) \leq x - 1$.
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.
4. $\forall x > -1,\ \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Correction 3. Par un théorème du cours, une fonction différentiable $f\colon C \to \mathbb{R}$ qui est définie sur un ouvert convexe C d'un e.v.n. E, est convexe ssi pour tout $u, v \in U$:

$$f(u) - f(v) \geq df(v) \cdot (u - v)\ .$$

Selon un autre résultat du cours, $f\colon I \to \mathbb{R}$ differentiable et définie sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si f' est croissante (en particulier, si f est deux fois differentiable, f est convexe si $f'' \geq 0$).

1. Comme $\frac{d^2}{dx^2}e^x = e^x > 0$, alors e^x est convexe. Selon le premier résultat, nous avons

   $$e^x - e^{x'} \geq f'(x') \cdot (x - x') = e^{x'} \cdot (x - x')\ .$$

   Si l'on pose $x' = 0$, nous trouvons l'inégalité désirée.
2. Comme $\frac{d^2}{dx^2}\ln x = \frac{d}{dx}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} < 0$, alors $f(x) = -\ln x$ est convexe. À nouveau avec le résultat du cours, on trouve

   $$\ln x' - \ln x = f(x) - f(x') \geq f'(x') \cdot (x - x') = -\frac{1}{x'} \cdot (x - x')\ .$$

   Pose $x' = 1$, alors

   $$-\ln x \geq -x + 1\ .$$
3. Comme $\frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$, la fonction $f(x) = -\sin x$ est convexe sur l'intervalle $[0, \pi]$. On trouve donc

   $$\sin x' - \sin x = f(x) - f(x') \geq f'(x') \cdot (x - x') = -\cos x' \cdot (x - x')\ .$$

   Si on évalue en $x' = 0$, on trouve

   $$-\sin x \geq -x\ .$$

Pour l'autre inégalité, on se sert de la définition de la convexité : toute segment droit entre deux points du graphe de f se trouve au-dessus du graphe, c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in]0,1[$

$$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') \geq f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) \ .$$

En choisissant $x = 0$ et $x' = \pi/2$, on trouve pour tout $\lambda \in]0,1[$

$$\lambda - 1 = \lambda\, f(0) + (1-\lambda)\, f(\pi/2) \geq f\big((1-\lambda)\,\pi/2\big) = -\sin\big((1-\lambda)\,\pi/2\big)$$

ou

$$1 - \lambda \leq \sin\big((1-\lambda)\,\pi/2\big) \ .$$

En remplaçant $(1-\lambda)\,\pi/2$ par la variable x, nous trouvons $\frac{2}{\pi}\, x = 1 - \lambda$ et λ est bien entre $]0,1[$, donc

$$\frac{2}{\pi}\, x \leq \sin x \ .$$

4. La fonction $g(x) = \sqrt{1+x}$ a deuxième dérivé $g''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3} < 0$, alors $f(x) = -\sqrt{1+x}$ est convexe. On trouve avec

$$f(x) - f(x') \geq df(x') \cdot (x - x') \ .$$

où en remplace $x' = 0$ pour obtenir

$$-\sqrt{1+x} + 1 = f(x) - f(0) \geq df(0) \cdot x = -\frac{1}{2\sqrt{1}} \cdot x = -\frac{1}{2} \cdot x$$

qui donne l'inégalité cherchée.

Exercice 4. Montrer que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{pour } x \neq 0 \\ 1 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

est croissante sur $\mathbb{R}$.

Correction 4. Selon le cours, une fonction $g\colon I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction

$$\triangle_a g(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}$$

est croissante sur $I \setminus \{a\}$.
Ici, on reconnaît $\frac{e^x - 1}{x}$ comme la fonction $\triangle_a g(x)$ pour $g(x) = e^x$ et $a = 0$. Comme e^x est convexe, on déduit que f est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Finalement, on sait que e^x est differentiable en $x = 0$, ce qu'implique que $\triangle_0 g(x)$ a une extension continue en $x = 0$, et $\lim_{x\to 0} \triangle_0 g(x) = \frac{d}{dx}\big|_{x=0} \exp x = e^0 = 1$, mais c'est bien la valeur de f en 0 donnée dans l'exo, $f(x)$ est donc une fonction continue.
Clairement, une fonction qui est continue en 0 et croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ est croissante sur tout $\mathbb{R}$, car choisie n'importe quel $x > 0$, alors

$$f(x) - f(0) = \big(f(x) - f(\varepsilon)\big) + \big(f(\varepsilon) - f(0)\big) \ .$$

La première parenthèse est toujours positive pour $0 < \varepsilon < x$, donc

$$f(x) - f(0) \geq f(\varepsilon) - f(0) .$$

Comme $|f(\varepsilon) - f(0)| \to 0$ si $\varepsilon \to 0$, et comme le côté gauche est indépendant de ε, nous obtenons

$$f(x) - f(0) \geq 0 .$$

Pour $x < 0$, le calcul est analogue. On a donc prouvé que f est croissante sur tout $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit f la fonction définie par la formule $f(x) = x^{2k}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

1. En calculant la dérivée seconde, montrer que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que f est strictement convexe sur $\mathbb{R}$.

Correction 5.

1. $f'(x) = 2k\, x^{2k-1}$ et $f''(x) = 2k\,(2k-1)\, x^{2k-2}$. Si $k = 1$, alors $f''(x) = 2 > 0$ et f est strictement convexe sur tout $\mathbb{R}$, si $k > 1$, alors $f''(x)$ est strictement positive sur $\mathbb{R}^*$, mais en $x = 0$ la deuxième dérivé s'annule. On trouve donc que f est strictement convexe sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ ($\mathbb{R}^*$ n'est pas un domaine convexe).
2. Pour vérifier la convexité stricte sur tout $\mathbb{R}$, nous utilisons la définition : Il faut montrer que pour tout $x, x' \in \mathbb{R}$ avec $x \neq x'$, la segment par entre $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(x', f(x')\big)$ se trouve (sauf pour les points initiales et finales) strictement au-dessus du graphe de f, c'est-à-dire, pour tout $\lambda \in]0,1[$

   $$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) .$$

   Si $x' = 0$, on obtient l'inégalité stricte

   $$\lambda\, f(x) = \lambda\, x^{2k} > \lambda^{2k}\, x^{2k} = f\big(\lambda\, x\big) ,$$

   car $\lambda \in]0,1[$. Soient $x, x' > 0$, comme f est strictement convexe sur $]0, \infty[$ nous trouvons

   $$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) .$$

   Clairement $f(x') = f(-x')$, donc

   $$\lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(-x') > f\big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big) = \big(\lambda\, x + (1-\lambda)\, x'\big)^{2k} .$$

   Nous finissons la preuve avec $(a-b)^{2k} \leq (a+b)^{2k}$ pour $a, b > 0$ car $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ et car la fonction $x \mapsto x^k$ est croissante sur $[0, \infty[$.

Exercice 6. Soient E, F des e.v. sur $\mathbb{R}$.

1. Soient $f\colon E \to \mathbb{R}$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que f est convexe et g est convexe et croissante. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. Si $f\colon E \to \mathbb{R}$ est convexe et $A\colon F \to E$ linéaire, montrer que $f \circ A$ est convexe.
3. Montrer que $f(x,y) = \big(|2x+3y| + |x-y|\big)^p$ est convexe sur $\mathbb{R}^2$ pour $p \in [1, +\infty[$.

Correction 6.

1. Soit $u, v \in E$ et $\lambda \in]0,1[$, alors par la convexité de f nous avons
$$f\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big) \leq \lambda\, f(u) + (1-\lambda)\, f(v)\ .$$
Grâce à la monotonicité de g nous pouvons appliquer g des deux côtés
$$g \circ f\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big) \leq g\big(\lambda\, f(u) + (1-\lambda)\, f(v)\big)\ .$$
Maintenant on utilise sur le côté droite que g est convexe pour voir que $g \circ f$ est convexe.
2. La linéarité de A nous permet d'écrire
$$f\big(A\big(\lambda u + (1-\lambda)\, v\big)\big) = f\big(\lambda\, Au + (1-\lambda)\, Av\big)$$
et la convexité de f fait que
$$f\big(\lambda\, Au + (1-\lambda)\, Av\big) \leq \lambda\, f(Au) + (1-\lambda)\, f(Av)\ ,$$
donc $f \circ A$ est bien convexe.
3. La fonction f se compose de $g(x,y) = |2x+3y| + |x-y|$ et $u \mapsto u^k$. La deuxième fonction est convexe et croissante sur $[0, \infty[$. Avec la partie 1 de cet exercice, il suffit de montrer que g est convexe. Comme vu dans le cours, la somme de deux fonctions convexes est convexe, if faut donc montrer que $(x,y) \mapsto |2x+3y|$ et $(x,y) \mapsto |x-y|$ sont convexes.
L'application $x \mapsto |x|$ est convexe, car
$$|\lambda x + (1-\lambda)\, x'| \leq \lambda\, |x| + (1-\lambda)\, |x'|$$
par l'inégalité triangulaire. $(x,y) \mapsto 2x+3y$ et $(x,y) \mapsto x-y$ sont des fonctions linéaires et nous finissons en appliquant partie (2) de cet exercice.

Exercice 7.

1. Prouver que la fonction f définie par $f(x,y) = xy$ n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$, mais que les fonctions g, h définies par $g(x,y) = x^2 + y^2$ et $h(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ le sont.
2. Montrer que les trois fonctions suivantes sont séparément convexes en x (pour chaque y) et en y (pour chaque x).
$$i(x,y) = \exp(x+y), \quad j(x,y) = \exp(xy), \quad k(x,y) = \exp x + \exp y\ .$$
Lesquelles sont des fonctions convexes sur $\mathbb{R}^2$?

Rappels : La hessienne d'une fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 est la matrice

$$Hf(x_1,\dots,x_n) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\dots,x_n)\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

de ses dérivés partielles secondes. La matrice est *symétrique* car $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.
Une matrice symétrique A est dite *positive* si ${}^t vAv \geq 0$ quelque soit $v \in \mathbb{R}^n$, elle est dite *définie positive* si $\forall v \neq \mathbf{0}$: ${}^t vAv > 0$.
Pour tester si A est définie positive, il existe le

> **Critère de Sylvester :** Pour qu'une matrice $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, réelle symétrique, soit définie positive, il faut et suffit que les n matrices $A_p = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ pour p de 1 à n, aient leur déterminant strictement positif, autrement dit que les n mineurs principaux dominants soient strictement positifs.

Attention : Si $\det A_p \geq 0$ pour tous les p de 1 à n, ce ne suffit pas pour dire que A est positive (exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) par contre nous pouvons déduire un critère facile pour montrer que A *n'est pas* positive :

> Soit $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, une matrice réelle symétrique. Si le déterminant d'une des n matrices $A_p = \big(a_{ij}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ pour p de 1 à n est strictement négative, alors A n'est pas positive.

Preuve : Toute matrice symetrique A admet une base de vecteurs propres $v_1,\dots,v_n$ associés aux valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Il est facile de se convaincre que A est positive si et seulement si tous les valeurs propres sont positives et définie positive si et seulement si tous les valeurs propres sont strictement positives.
En particulier, si A est positive, nous pouvons legèrement pousser toutes les valeurs propres qui s'annulent vers $]0,\infty[$ pour trouver une matrice symétrique A' définie positive arbitrairement proche de A. Le critère de Sylvester nous dit que les sous-déterminants de A' sont strictement positives et par continuité il faut donc que les déterminants de toutes sous-déterminants A_p de A soit au moins positives.
Exercice : ajouter les détails.

Correction 7. 1. Toutes les fonctions mentionnées sont lisses, nous pouvons donc calculer leur hessiennes.

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad Hh(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On voit que selon le choix du vecteur (a,b),

$$Hf(x,y)(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = 2ab$$

peut être positive (par exemple $(a,b) = (1,1)$) ou négative (par exemple $(a,b) = (1,-1)$). Selon le critère expliqué au cours, f n'est ni convexe ni concave.

Les formes symétriques $Hg(x,y)$ et $Hh(x,y)$ sont définies positives. C'est facile à vérifier avec :

et on déduit que g et h sont strictement convexes.

2. Les fonctions sont lisses, nous obtenons pour leur hessiennes

$$Hi(x,y) = \exp(x+y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \quad Hj(x,y) = \exp(xy) \cdot \begin{pmatrix} y^2 & 1+xy \\ 1+xy & x^2 \end{pmatrix} \;,$$
$$Hk(x,y) = \begin{pmatrix} \exp x & 0 \\ 0 & \exp y \end{pmatrix} \;.$$

Avec le critère de Sylvester, nous voyons que Hi et Hk sont positive définies, par contre Hj ne l'est pas car $\det Hj = -\exp(2xy) \cdot (1+2xy)$ qui n'est ni positive ni négative. Ceci implique que i et k sont strictement convexe et j n'est même pas convexe.

Dans tous les trois cas, nous voyons que les fonctions sont séparement convexes en x et en y, car leur dérivés respectives correspondent aux valeurs sur la diagonale de l'héssienne.

Exercice 8. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[-1,1]^2$:

$$h_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6}, \quad h_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12}, \quad h_3(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{3}, \quad h_4(x,y) = x^4+y^4-4xy \;.$$

Correction 8. Toutes les trois fonctions sont lisses. Calculons donc les hessiennes :

$$Hh_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \;, \qquad Hh_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix} \;,$$
$$Hh_3(x,y) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;, \qquad Hh_4(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix} \;.$$

Clairement Hh_1 n'est ni positive ni négative pour $x<0$ et $y>0$ ou $x>0$ et $y<0$. En particulier, h_1 n'est pas convexe (ni concave).
La matrice Hh_2 est définie positive sur l'ensemble où $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Ceci suffit pour dire que pour tel (x,y), ${}^tv \cdot Hh_2(x,y) \cdot v \geq 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Comme Hh_2 est continue, on garde v fix et pousse $x \to 0$ ou $y \to 0$, et on obtient ${}^tv \cdot Hh_2(0,y) \cdot v \geq 0$ et ${}^tv \cdot Hh_2(x,0) \cdot v \geq 0$. Ceci implique que h_2 est convexe.
La matrice Hh_3 est définie positive sur $x > -1/2$, mais h_3 n'est pas convex pour $x < -1/2$. La matrice Hh_4 est seulement définie positive si $9x^2y^2 > 1$, c-à-d, $|x|\,|y| > 1/3$. Ni h_3 ni h_4 ne sont convexes.

Exercice 9. Soit $f(x,y,z) = (2x+y)^2 + (2x+z)^2 - x^2$.

1. Montrer que les restrictions de f aux sous-espaces :

$$C_1 = \{(x,y,0), (x,y) \in \mathbb{R}^2\}, \;\; C_2 = \{(x,0,z), (x,z) \in \mathbb{R}^2\}, \;\; C_3 = \{(0,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$$

sont convexes.

2. Est-ce que f est convexe sur $\mathbb{R}^3$?

Correction 9. Calculons l'héssienne de f :

$$Hf(x,y,z) = \begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Chacune de sous-déterminants

$$\begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 12, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 4, \quad \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

   est strictement positive (et 14, 2, 14 aussi). Les matrices sont donc définie positive et les restrictions de f au hyperplan $x = 0$, au hyperplan $y = 0$ et au hyperplan $z = 0$ sont strictement convexe.

2. Pour montrer que f n'est pas convexe, observons d'abord que les sous-déterminants

$$14 > 0, \qquad \det \begin{pmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = 2^2 \cdot (7-4) = 12 > 0, \qquad \det Hf = 2^3 \cdot (-1) = -8 < 0 .$$

   ne sont pas toutes positives, donc Hf n'est pas définie positive, et f n'est donc convexe.

Exercice 10. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction f définie par :

$$f(x,y) = x^2 - 2x + y^4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 \leq x \leq 1/2, 0 \leq y \leq 2\} = [0, \frac{1}{2}] \times [0,2]$.

1. Montrer que A est convexe.
2. Prouver que f est convexe sur A.
3. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact).
4. Trouver la solution.

Correction 10.

1. A est convexe comme produit de deux intervalles.
2. L'hessienne de f est

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix} .$$

   On obtient que f est convexe sur $[0,1/2] \times [0,2]$ (car ${}^t v \cdot Hf \cdot v = 2a^2 + 12y^2b^2 \geq 0$ pour $v = (a,b)$) et même strictement convexe sur $[0,1/2] \times]0,2]$.

3. A est compact car fermé et borné. Toute fonction continue atteint un minimum sur un compact, mais il se pourrait qu'il y en a plusieures. Une fonction strictement convexe sur un convexe n'a qu'au plus un minimum (comparez avec exo 11.2).

   Suppose que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) sont deux minima de f. En particulier $f(x_0,y_0) = f(x_1,y_1)$. Par la convexité, nous avons

$$f\big((1-s)\,(x_0,y_0) + s\,(x_1,y_1)\big) \leq (1-s)\,f\big(x_0,y_0\big) + s\,f\big(x_1,y_1\big)$$

pour tout $\lambda \in]0,1[$ et on déduit que f est constant sur le segment entre (x_0, y_0) et (x_1, y_1).

On va distinguer deux cas : Si $y_1 \neq 0$, l'intérieure du segment se trouve aussi dans $[0,1/2]\times]0,2]$. Le minimum de de la restriction de f à $[0,1/2]\times]0,2]$ n'est pas unique, ce qui est une contradiction à la convexité stricte.

On obtient donc que forcement $x_0 = y_0 = 0$, mais on voit que la restriction $f(\cdot, 0)$ est convexe sur $[0,1/2]$, il faut donc que le minimum de $f(\cdot, 0)$ soit unique.

4. Le gradient de f est $\nabla f = (2x - 2, 4y^3)$. Le seul point où ∇f s'annule est $(1,0)$, mais ce point ne se trouve pas dans le domaine A. Forcement, f atteint donc son minimum sur le bord de A.

   En regardant les quatres fonctions $f_1(x) = f(x,0) = x^2 - 2x$, $f_2(x) = f(x,2) = x^2 - 2x + 4$, $f_3(y) = f(0,y) = y^4$, $f_4(y) = f(1/2, y) = -3/4 + y^4$, nous trouvons les respetivement que le minimum globale de f_1 est $x = 1$, mais pas se trouvant sur $[0,1/2]$, le minimum est $x = 1/2$, le minimum de f_2 est aussi $x = 1/2$, le minimum de f_3 est $y = 0$ et le minimum de f_4 est $y = 0$. Le minimum de f est donc le point $(x,y) = (1/2, 0)$.

Exercice 11. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^2y^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.
2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème.
3. Trouver la solution.

Correction 11. 1. A est le produit de deux intervalles et donc convexe. f est lisse en son hessienne est

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + \frac{y^3}{6} + 1 & \frac{xy^2}{2} \\ \frac{xy^2}{2} & \frac{x^2y}{2} + 1 \end{pmatrix} .$$

Avec le critère de Sylvester, il faut montrer que $x^2 + \frac{y^3}{6} + 1$ et $\det Hf$ sont positifs. Pour la première condition avec $y \geq -1$ sur A, nous obtenons la borne $x^2 + \frac{y^3}{6} + 1 \geq x^2 - \frac{1^3}{6} + 1 \geq \frac{5}{6} > 0$. Le déterminant nous donne $\det Hf = \frac{x^4y}{2} + x^2 - \frac{x^2y^4}{6} + \frac{y^3}{6} + 1 \geq -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{6} > 0$ à nouveau car $|x|$ et $|y|$ sont bornés par 1.
Ceci montre que f est strictement convexe sur A.

2. A est un compact et nous savons qu'une fonction continue atteint toujours un minimum sur un compact. Pour montrer l'unicité, soient (x_0, y_0) et (x_1, y_1) des minima (donc en particulier $f(x_0, y_0) = f(x_1, y_1)$) et suppose que $(x_0, y_0) \neq (x_1, y_1)$. Comme A est convexe, tout point $(1-s)\big(x_0, y_0\big) + s\big(x_1, y_1\big)$ sur le segment joignant les deux points apartient à A et la convexité *stricte* de f nous donne

$$f\big((1-s)\big(x_0, y_0\big) + s\big(x_1, y_1\big)\big) < (1-s)\, f\big(x_0, y_0\big) + s\, f\big(x_1, y_1\big) .$$

Nous voyons en contradiction que (x_0, y_0) et (x_1, y_1) étaient les minima de f que f est encore plus petit sur tous les point intermédiaire. On déduit que $(x_0, y_0) = (x_1, y_1)$.

3. Le minimum de f se trouve à l'intérieure de A ou sur son bord. Une condition necéssaire pour avoir un minimum en un point à l'intérieure de A est que ∇f s'annule dans ce point. On a $\nabla f = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{xy^3}{6} + x, \frac{x^2y^2}{4} + y\right) = \left(\frac{x}{3}\,(x^2 + \frac{y^3}{2} + 3), y\,(\frac{x^2y}{4} + 1)\right)$. La seule solution de $\nabla f = (0, 0)$ est $(x, y) = (0, 0)$ car $x^2 + \frac{y^3}{2} + 3$ ne peut pas s'annuler sur A.

   Comme $Hf(0, 0)$ est définie positive, le minimum se trouve de f se trouve donc en $(0, 0)$.

Exercices plus difficiles

Exercice 14.
1. Soit C une partie fermée dans E e.v.n. telle que si $x, y \in C$ alors $\frac{x+y}{2} \in C$. Prouver que C est convexe.
2. Soit C convexe fermé de E. Soit $f\colon C \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in C \qquad f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} .$$

   Montrer que f est convexe.
3. Même question C est juste convexe mais pas fermé. (Indication : utiliser l'ex. 13)

Correction 14.
1. Idée : Si avec $x_0, x_1 \in C$, on a toujours que le point a mi-distance $x_{1/2} := \frac{1}{2}\,(x_0+x_1)$ entre x_0 et x_1 se trouve aussi dans C, on déduit que le point à mi-distance entre x_0 et $x_{1/2}$ et le point à mi-distance entre $x_{1/2}$ et x_1 se trouvent aussi dans C et nous pouvons alors repéter cette construction arbitrairement souvent pour recupérer tous les points entre x_0 et x_1 de la forme

$$x_{a/2^n} := \frac{a}{2^n}\,x_0 + \frac{2^n - a}{2^n}\,x_1$$

   avec $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \{0, \dots, 2^n\}$. Les nombres de la forme $a/2^n$ sont denses dans $[0, 1]$, nous pouvons donc trouver pour n'importe quel $s_\infty \in [0, 1]$ une suite s_j où est de la forme $s_j = a_j/2^{n_j}$ tel que $s_j \to s_\infty$.

   Les points x_{s_j} sont tous dans C et ils convergent vers x_∞ et comme C est fermé, nous voyons que $x_\infty \in C$. Ceci montre que tout le segment entre x_0 et x_1 se trouve dan C, et C est donc convexe.
2. Pour prouver que f est convexe, il faut montrer pour tout $s \in]0, 1[$ que

$$f\big((1-s)\,x + sy\big) \leq (1-s)\,f(x) + s\,f(y)\ . \tag{2}$$

   On voit que l'inégalité est vraie pour tout $s = 1/4$ car

$$\begin{aligned} f\big((1-1/4)\,x + 1/4\,y\big) &= f\big(1/2\,x + 1/4\,x + 1/4y\big) \\ &= f\big(1/2\,x + 1/2\,(1/2\,x + 1/2\,y)\big) \leq (1-1/2)\,f(x) + 1/2\,f\big(1/2\,x + 1/2\,y\big) \\ &\leq 1/2\,f(x) + 1/2\,\big(1/2\,f(x) + 1/2\,f(y)\big)\ . = 3/4\,f(x) + 1/4\,f(y)\ . \end{aligned}$$

Et nous pouvons de la même façon montrer qu'elle est vraie pour tout s de la forme $a/2^n$.

Pour un $s_\infty \in]0,1[$ nous trouvons avec la même construction utilisé ci-dessus une suite (s_n) qui converge vers $s_\infty \in C$ et l'inégalité (2) est vraie pour tous les s_k. Par continuité de f, l'inégalité reste vraie pour s_∞ et nous avons montrer que f est convexe.

Correction des Exercices d'entraînements

Exercice 22. Montrer que les C_i sont convexes et trouver les cônes normaux $N_{C_i}(a_j)$:

1. $C_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ en $a_1 = (0,0)$ et en $a_2 = (0,1)$.

   $C_5 = \overline{B(0,1)}$ est la boule fermée pour la norme euclidienne donc convexe. $a_1 \in B(0,1) = Int(\overline{B(0,1)})$ donc d'après le cours $N_{C_5}(a_1) = \{0\}$.

   Le calcul de $N_{C_5}(a_2)$ est plus dur (on passe par le calcul du tangent jamais fit en TD pour se ramener à une calcul de la forme vue en TD). On calcule $T_{C_5}(a_2) = \{(x,y) : y \leq 0\} = \mathbb{R}\times]-\infty,0]$. On rappelle que $T_{C_5}(a_2) = \overline{\mathbb{R}_+(C_5 - a_2)}$ Si $(x,y) \in C_5$ alors $y^2 \leq 1$ donc $y \leq 1$ donc $(x,y) - (0,1) = (x, y-1) \in \mathbb{R}\times]-\infty,0]$ qui est fermé donc $T_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}\times]-\infty,0]$.

   Réciproquement, on va dire que pour toute direction du demi-plan ouvert $\mathbb{R}\times]-\infty,0[\subset \mathbb{R}_+(C_5 - a_2)$. En effet si $y < 0$ on cherche $\lambda > 0$ telle que $(\lambda x, 1 + \lambda y) \in C_5$ ce qui donne $\lambda^2 x^2 + 1 + \lambda^2 y^2 + 2\lambda y \leq 1$, il suffit $0 < \lambda = 2|y|/(x^2+y^2)$. En prenant l'adhérence, on obtient :

   $$\mathbb{R}\times]-\infty,0] \subset \overline{\mathbb{R}\times]-\infty,0[} \subset \overline{\mathbb{R}_+(C_5 - a_2)} = T_{C_5}(a_2).$$

   La première inclusion vient de $(x, y - 1/n) \in \mathbb{R}\times]-\infty,0[$ pour $y \leq 0$ et converge vers (x,y) donc la caractérisation séquentielle implique l'inclusion.

   On a vu en cours que
   $$N_{C_5}(a_2) = N_{T_{C_5}(a_2)}(a_2).$$
   Donc on montre comme à l'exo 1 que cela vaut $R_+(0,1)$. D'abord, $(0,1) \in N_{C_5}(a_2)$ est évident car si $(x,y) \in C_5 \langle (x, y-1), (0,1)\rangle = y - 1 \leq 0$. De même,$(0,-1) \notin N_{C_5}(a_2)$.

   Donc par le cours, comme $N_{C_5}(a_2)$ est un cône, on a obtenu

   $$\mathbb{R}_+(0,1) \subset N_{C_5}(a_2).$$

   Réciproquement, $a_2 \in [(-1,1),(1,1)] \subset T_{C_5}(a_2)$ donc

   $$N_{C_5}(a_2) = N_{T_{C_5}(a_2)}(a_2) \subset N_{[(-1,1),(1,1)]}(a_2) = \mathbb{R}(2,0)^\perp = \mathbb{R}(0,1).$$

   Comme on a vu $(0,-1) \notin N_{C_5}(a_2)$. Donc $N_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}(0,1)$, on déduit $N_{C_5}(a_2) \subset \mathbb{R}_+(0,1)$ ce qui est l'autre inclusion voulue.

2. $C_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| \leq 1\} = \overline{B_{||.||_1}((1,0),1)}$ est une boule fermé donc convexe (pour la norme $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$ cf TD 5). On veut calculer les cônes normaux $a_1 = (0,0)$, en $a_3 = (1,0)$ et en $a_4 = (1/2, 1/2)$. Comme avant $Int(C_6) = B_{||.||_1}((1,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-1| + |y| < 1\}$ $a_3 \in Int(C_6)$ et donc d'après le cours $N_{C_6}(a_3) = \{0\}$.

   Montrons que $N_{C_6}(a_4) = \mathbb{R}_+(-1,1)$.
   On montre d'abord que $(-1,1) \in N_{C_6}(a_4)$ si $(x,y) \in C_6$, on regarde :
   $\langle (x,y) - (a_4), (-1,1) \rangle = -(x - 1/2) + (y - 1/2) = y - x \leq 0$ car $(1-x) + y \leq |x-1| + |y| \leq 1$ donc $y - x \leq 0$ sur C_6 donc $(-1,1) \in N_{C_6}(a_4)$.
   Réciproquement, $a_4 \in [(0,0),(1,1)] \subset C_6$ on déduit $N_{C_6}(a_4) \subset N_{[(0,0),(1,1)]}(a_4) = \mathbb{R}(1,1)^\perp = \mathbb{R}(-1,1)$ vu que a_4 est dans le segment privé des extrémités. Il reste à voir que $(1,-1)$ n'est pas dans $N_{C_6}(a_4)$, en effet, $\langle (x,y) - (a_4), (1,-1) \rangle = x - y$ ce n'est pas négatif en $(1,0) \in C_6$, donc $N_{C_6}(a_4) \subset \mathbb{R}_+(-1,1)$, ce qui donne l'égalité.

   Montrons que $N_{C_6}(a_1) = \mathbb{R}_+(-1,1) + \mathbb{R}_+(-1,-1)$. On raisonne par double inclusion :
   Comme avant, on commence par montrer que $(-1,1), (-1,-1)$ sont dans le cône normal. on calcule donc pour $(x,y) \in C_6$ $\langle (x,y) - (a_1), (-1,1) \rangle = -(x-0) + (y-0) = y - x \leq 0$ comme avant donc $(-1,1) \in N_{C_6}(a_1)$.
   De même $\langle (x,y) - (a_1), (-1,-1) \rangle = -(x-0) - (y-0) = -y - x \leq 0$
   $(1-x) - y \leq |x-1| + |y| \leq 1$ donc $(-1,-1) \in N_{C_6}(a_1)$. Comme $N_{C_6}(a_1)$ est un cône convexe, on déduit :

$$\mathbb{R}_+(-1,1) + \mathbb{R}_+(-1,-1) \subset N_{C_6}(a_1).$$

   Réciproquement, on considère $a_1 = (0,0) \in [(0,0),(1,1)] \subset C_6$, donc par le cours $N_{C_6}(a_1) \subset N_{[(0,0),(1,1)]}(a_1) = \mathbb{R}(1,1)^\perp + R_+(-1,-1) = \mathbb{R}(-1,1) + R_+(-1,-1) = \{(x,y) : y \leq -x\}$ (car a_1 est sur le bord du segment). On considère enfin $a_1 = (0,0) \in [(0,0),(1,-1)] \subset C_6$ $N_{C_6}(a_1) \subset N_{[(0,0),(1,-1)]}(a_1) = \mathbb{R}(1,-1)^\perp + R_+(-1,1) = \mathbb{R}(-1,-1) + R_+(-1,1) = \{(x,y) : y \geq x\}$.
   En prenant l'intersection on obtient $N_{C_6}(a_1) \subset \{(x,y) : -x \geq y \geq x\}$. L'examen de ces conditions identifie ceci à un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+(-1,1) + \mathbb{R}_+(-1,-1)$ en écrivant $(x,y) = -(y+x)/2(-1,-1) + (y-x)/2(-1,1)$ vu les deux nombres $(y-x)/2, -(y+x)/2 \geq 0$. Cela donne l'inclusion réciproque

$$N_{C_6}(a_1) \subset \mathbb{R}_+(-1,1) + \mathbb{R}_+(-1,-1).$$

Exercice 23. On s'intéresse au problème de minimiser la fonction

$$f(x,y) = x^4 + x^2y^3 + 9x^2 + 8y^2 + 4$$

sur le pavé $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

1. Prouver que f est strictement convexe sur A.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^3 + 18x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2x^2 + 16y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 + 2y^3 + 18, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6yx^2 + 16, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6xy^2$$

Comme

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y).((h,k),(h,k)) &= (12x^2 + 2y^3 + 18)h^2 + 6xy^2 2hk + (6yx^2 + 16)k^2 \\ &\geq (2y^3 + 18)h^2 + (6yx^2 + 16)k^2 + 6xy^2 kh \\ &\geq (18-4)h^2 + (16-12)k^2 - 12(\frac{k^2}{4} + h^2) = 2h^2 + k^2 \\ &\geq h^2 + k^2 = \langle I_2(h,k),(h,k)\rangle \end{aligned}$$

pour $|y|, |x| < \sqrt[3]{2}$, de sorte qu'on a utilisé à l'avant-dernière ligne $|y^3|, |yx^2|, |xy^2| < 2$, et $2hk \leq (\frac{k^2}{4} + h^2)$.

On obtient donc $H(f)(x,y) \geq I_2$, donc par le cours f est strictement convexe sur l'ouvert $]-\sqrt[3]{2}, +\sqrt[3]{2}[^2 \supset A$

2. Montrer qu'il existe une solution unique du problème (Indication : rappeler pourquoi A est compact)

   Par continuité, la fonction admet un minimum sur le compact A (boule fermé donc fermé borné en dimension finie), il est unique par convexité stricte.

3. On trouve la solution en cherchant les minima locaux. On remarque que $(0,0)$ annule le gradient, c'est donc un point critique sur l'ouvert $Int(A)$, donc c'est l'unique minimum sur tout A. (par exemple on utilise le théorème de minimisation sur un convexe et $-\nabla f(0,0) \in N_A(0) = \{0\}$ vu $0 \in Int(A)$).

Exercice 24. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $\mathbb{R}^2$.

$$f_0(x,y) = x^2+y^2+x^4,\ f_1(x,y) = x^2+y^2+x^3,\ f_2(x,y) = x^4+y^4-4xy,\ f_3(x,y) = \cos(x+y),$$

$$f_4(x,y) = xe^y + ye^x,\ f_5(x,y) = |x+1| + |y|,\ f_6(x,y) = (|x+1| + |y|)^2.$$

On commence f_0, f_1, f_2 qui sont des polynômes donc de classe C^∞.

1. $Hf_0(x,y) = \begin{pmatrix} 2+12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. qui est positive car ces valeurs propres $2+12x^2, 2 \geq 0$, donc f_0 est convexe sur $\mathbb{R}^2$.

2. $Hf_1(x,y) = \begin{pmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_1(-1,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, a un déterminant -8 négatif, donc $Hf_1(-1,0)$ n'est pas positive et donc f_1 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

3. $Hf_2(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$, mais $Hf_2(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, a un déterminant -16 négatif, donc $Hf_2(0,0)$ n'est pas positif et donc f_2 n'est pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.

4. f_3 est périodique non constante, on se doute qu'elle ne va pas être convexe (mais ce n'est pas une preuve, on n'a pas vu de résultat de ce type en cours), elle est C^∞ par composition de cos et d'une fonction linéaire, $\nabla f_3(x,y) = (-\sin(x+y), -\sin(x+y))$, donc $Hf_3(x,y) = \begin{pmatrix} -cos(x+y) & -cos(x+y) \\ -cos(x+y) & -cos(x+y) \end{pmatrix}$, par exemple

$Hf_3(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, son déterminant $rt - s^2 = 0$ mais $r = -1 < 0$ donc $Hf_3(0,0)$ n'est pas positive, donc f_3 n'est pas convexe.

5. $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x^2}(x,y) = ye^x$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$, $\frac{\partial^2 f_4}{\partial x \partial y}(x,y) = e^x + e^y$.
   $Hf_4(-1,1) = \begin{pmatrix} -e^{-1} & 2e^{-1} \\ 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}$. On a donc $rt - s^2 = e^{-1}(1-4) < 0$, donc $Hf_4(-1,1)$ n'est pas positive et f_4 n'est donc pas convexe sur $\mathbb{R}^2$.
6. f_5, f_6 ne sont pas même C^1 à cause des valeurs absolues, on ne peut pas dériver, on n'utilise une méthode proche de l'exercice 6.
   $f_5(x,y) = ||(x,y) + (1,0)||_1$ vu $||(x,y)||_1 = |x| + |y|$, est la composée de la norme qui est convexe (par le cours), avec la fonction affine $A(x,y) = (x,y) + (1,0)$. On remarque que : $A(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y')) = \lambda(A(x,y)) + (1-\lambda)(A(x',y'))$
   Donc, on obtient la convexité en utilisant la convexité de la norme pour $\lambda \in [0,1]$:
   $$||A(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y'))|| = ||\lambda(A(x,y))+(1-\lambda)(A(x',y'))||_1 \leq \lambda||A(x,y)||_1+(1-\lambda)||A(x',y')||_1$$
7. f_6 est la composée de f_5 convexe et $g(x) = x^2$ (une fonction croissante convexe) donc par l'exercice 6 : $f_6 = g \circ f_5$ est convexe. Concrètement, on peut (utiliser la convexité de f_5 :$f_5(\lambda(x,y) + (1-\lambda)(x',y') \leq \lambda f_5(x,y) + (1-\lambda)f_5(x',y')$ auquel on applique la croissance de g, puis on utilise la convexité de g) :
   $$g \circ f_5(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')) \leq g(\lambda f_5(x,y)+(1-\lambda)f_5(x',y')) \leq \lambda(g \circ f_5(x,y))+(1-\lambda)(g \circ f_5(x',y'))$$

Exercice 25. Lesquels parmi les fonctions suivantes sont convexes sur $[0,1]^2$:

$$g_1(x,y) = \frac{x^3+y^3}{6},\ g_2(x,y) = \frac{x^4+y^4}{12},\ g_3(x,y) = -\sqrt{2-(x^2+y^2)}$$

$$g_4(x,y) = \frac{x^2y^2}{2},\ g_5(x,y) = \cos(xy),\ g_6(x,y) = x^2+y^2+\frac{x^3}{6}.$$

ON commence g_1, g_2, g_4, g_6 qui sont des polynômes donc C^∞, on calcule donc les dérivées secondes.

1. $Hg_1(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}$. C'est positif sur $[0,1]^2$ et même $\mathbb{R}_+^2$ (car à valeur propre positive) mais pas sur un voisinage ouvert. Par contre, c'est le cas sur l'ouvert $]0,+\infty[^2$, où g_1 est donc convexe (on va étendre la convexité par continuité). Pour $(x,y),(x',y') \in \mathbb{R}_+^2$, on a $(x+1/n, y+1/n) \in]0,+\infty[^2$ donc la convexité s'écrit pour $\lambda \in [0,1]$:
   $$g_1(\lambda(x+1/n,y+1/n)+(1-\lambda)(x'+1/n,y'+1/n)) \leq \lambda g(x+1/n,y+1/n)+(1-\lambda)g(x'+1/n,y'+1/n),$$
   en passant à la limite $n \to \infty$ vu g continue, on obtient l'inégalité voulue :
   $$g_1(\lambda(x,y)+(1-\lambda)(x',y')) \leq \lambda g(x,y)+(1-\lambda)g(x',y'),$$

2. g_2 est plus simple car $Hg_2(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$ est à valeurs propres positives sur $\mathbb{R}^2$ donc g_2 convexe sur $\mathbb{R}^2$ donc sur $[0,1]^2$.
3. $\nabla g_4(x,y) = (xy^2, yx^2)$ donc $Hg_4(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$.
le déterminant $rt - s^2 = x^2y^2 - 4x^2y^2 \leq 0$ et en $(1/2, 1/2)$ vaut $-3/16 < 0$ donc $Hg_4(1/2,1/2)$ n'est pas positive, donc g_4 n'est pas convexe.
4. $Hg_6(x,y) = \begin{pmatrix} 2+x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. à des valeurs propres positives sur l'ouvert $]-2,+\infty[\times\mathbb{R}$ donc g_6 est convexe sur cet ouvert donc sur $[0,1]^2$.
5. g_5 est C^∞ comme composée de cosinus et d'un polynôme. $\nabla g_5(x,y) = (-y\sin(xy), -x\sin(xy))$, donc

$$Hg_5(x,y) = \begin{pmatrix} -y^2\cos(xy) & -\sin(xy) - xy\cos(xy) \\ -\sin(xy) - xy\cos(xy) & -x^2\cos(xy) \end{pmatrix},$$

$r = -y^2 cos(xy)$ est négatif en $(1,1)$ $(cos(1) \in [0,1])$ donc $Hg_5(1,1)$ n'est pas positive donc g_5 n'est pas convexe.
6. Reste le cas le plus dur, celui de g_3 (On a l'intuition que g_3 est le graphe de la partie d'ordonnée négative d'une sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{2}$, ce qui semble convexe visuellement... Il serait facile de voir par composition que $-g_3$ est la compose d'une fonction concave croissante (la racine) et d'une fonction concave, qui est donc concave, on le montre par dérivation), Si x<1 ou y<1, on a $x^2 + y^2 < 2$ donc g_3 est a composée d'un polynôme à valeur strictement positif sur $[0,1]^2 \setminus \{(1,1)\} \subset B_{||.|||_2}(0,\sqrt{2})$ et de $x \mapsto -\sqrt{x}$ qui est C^∞ sur $]0,\infty[$ (mais pas dérivable en 0). Donc par composée g_3 est C^∞ sur $B_{||.|||_2}(0,\sqrt{2})$.
On calcule les dérivées premières et secondes : $\nabla g_3(x,y) = (\frac{x}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}})$

$$\begin{aligned} Hg_3(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{1}{\sqrt{2-(x^2+y^2)}} + \frac{y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2-y^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \\ \frac{xy}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} & \frac{2-x^2}{(2-(x^2+y^2))^{3/2}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

Son déterminant

$$rt-s^2 = ((2-x^2)(2-y^2)-x^2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 = (4-2x^2-2y^2)/(2-(x^2+y^2))^3 \geq 0$$

est positif si $x^2 + y^2 < 2$ et $r \geq 0$ donc $Hg_3(x,y)$ est positive sur la boule ouverte euclidienne $B_{||.|||_2}(0,\sqrt{2})$. Par continuité comme pour g_1, g_3 est aussi convexe sur l'adhérence (la boule fermé) qui contient $[0,1]^2$, ceci conclut à g_3 convexe sur cet ensemble.